

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Everton Nogueira
Lima..... E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 28/03/1996

Katia Lucchesi Carvalho
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Everton Nogueira Lima

Modelo Não-Linear para as Forças de Sustentação de Mancais Hidrodinâmicos em Rotores Verticais.

06/2012

Campinas, 1996

Everton Nogueira Lima

Modelo Não-Linear para as Forças de Sustentação de Mancais Hidrodinâmicos em Rotores Verticais

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Katia Lucchesi Cavalca Dedini

Campinas
1996

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

L628m	<p>Lima, Everton Nogueira</p> <p>Modelo Não-Linear para as Forças de Sustentação de Mancais Hidrodinâmicos em Rotores Verticais / Everton Nogueira Lima – Campinas, SP: [s.n.], 1996.</p> <p>Orientador: Katia Lucchesi Cavalca Dedini</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.</p> <p>1. Modelos matemáticos 2. Simulação (Computadores) 3. Rotores - Vibração 4. Equações – Soluções numéricas 5. Hidrodinâmica 6. Mancais. I. Dedini, Katia Lucchesi Cavalca. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.</p>
-------	--

Titular em Inglês: Non-Linear Model for Hydrodynamic Sustaining Forces on Vertical Rotors Journal Bearings.

Palavras-chave em Inglês: 1. Mathematical model, 2. Simulation (Computers), 3. Rotor dynamics - Vibration, 4. Equations - Numeric solutions, 5. Hydrodynamics, 6. Journal Bearings.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestrado

Banca examinadora: Prof^a. Dr^a. Katia Lucchesi Cavalca Dedini,
Prof. Dr. Carlos Alberto de Almeida e
Prof. Dr. Robson Pederiva.

Data da defesa: 28 de Março de 1996.

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Modelo Não-Linear para as Forças de
Sustentação de Mancais Hidrodinâmicos em
Rotores Verticais**

Autor: Everton Nogueira Lima

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Katia Lucchesi Cavalca Dedini.

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof^ª. Dr^ª. Katia Lucchesi Cavalca Dedini , Presidente
FEM-UNICAMP



Prof. Dr. Carlos Alberto de Almeida
PUC-RJ



Prof. Dr. Robson Pederiva
FEM-UNICAMP

Campinas, 28 de março de 1996.

Dedico este trabalho aos meus sobrinhos **Eduardo** e **Victor**.

Agradecimentos

Para todos aqueles que muito me ajudaram ao longo do caminho, desde o início, até agora nas fases de elaboração e principalmente de finalização deste trabalho, meus mais sinceros agradecimentos, porém alguns especiais:

Aos meus pais Adailto e Marlene, meus irmãos Emerson e Elen, e cunhado, Péricles Coutinho, pela ajuda, incentivo e compreensão.

Ao Sr. Zeno Alves de Melo e sua família, que muito me ajudaram no início difícil da graduação.

A grande vibração que move o universo, e da qual sou parte integrante.

A minha orientadora, Profa Dra Katia Cavalca, pelo grande incentivo e compreensão.

Aos professores do DPM, em especial ao Prof. Dr. Franco Dedini.

Aos funcionários do DPM e da SIFEM- Unicamp pela presteza e atenção.

A Sirayama de Oliveira Ferreira.

Aos amigos e amigas: Ângela Midori, André Chiarello, César Fidelis, Cibele Castro, Cleudmar Amaral, Dalmir M. Miranda, Eugênio da Cunha, Francisco José Vicente de Moraes, Inara Leal, João A. Pereira, Joaquim e Silvio C. Fest, José Milton Longo, Kissuco, Marcos Valério Ribeiro, Melquisedec dos Santos, Paula Cavalcante, Robinson Zamprônio, Rogério Zanaga, Rolando Perez, Ronaldo Madureira, Antonio Wagner Forti, Waldir A. Guimarães, Zander Machado....

Ao CNPq, Capes, Faep, SAE e CGPM, pelo suporte financeiro e moradias em Campinas.

“Ser homem é precisamente ser responsável. É experimentar vergonha em face a uma miséria que não parece depender de si. É ter orgulho de uma vitória dos companheiros. É sentir colocando a sua pedra que contribui para construir o mundo....”

Antoine Saint-Exupéry - Terra dos Homens

Resumo

LIMA, Everton Nogueira, *Modelo Não-Linear para as Forças de Sustentação de Mancais Hidrodinâmicos em Rotores Verticais*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996. 174p. Tese (Mestrado).

As máquinas rotativas cujos eixos são suportados ou direcionados por mancais hidrodinâmicos possuem certos comportamentos dinâmicos característicos. Quando o rotor está em movimento o atrito viscoso do filme de óleo e o movimento relativo entre as partes internas do eixo e do mancal produzem uma distribuição de pressões. A pressão atuando sobre a superfície do rotor provoca uma força hidrodinâmica não-linear, dependente de sua posição no mancal, da velocidade de rotação e das condições do fluido. O conhecimento dessas forças é de fundamental importância na análise do movimento vibratório para os equipamentos. O trabalho consiste na apresentação da dedução de modelos matemáticos não-lineares que possam representar a força hidrodinâmica exercida pelo óleo dos mancais sobre uma máquina rotativa vertical de rotor flexível. As forças não-lineares são avaliadas por um método analítico baseado na posição orbital do eixo do rotor. Essas forças, assim como o desbalanceamento excêntrico, são as fontes de excitação do sistema, e estão incluídas na equação de seu movimento. Uma característica particular do método é a rapidez da solução para as forças não-lineares. Para complementar o trabalho, o comportamento dinâmico característico do sistema à esta excitação é analisado pelas amplitudes das órbitas mostradas graficamente para algumas condições de operação.

Palavras Chave: Modelos matemáticos; Simulação (Computadores); Rotores.

Abstract

LIMA, Everton Nogueira, *Non-Linear Model for Hydrodynamic Sustaining Forces on Vertical Rotors Journal Bearings*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996. 155p. Tese (Mestrado).

Rotating machinery possessing rotors which are supported or guided by journal bearings has certain characteristic dynamical behavior. When a rotor is running, the viscous friction in the oil film and the relative movement among the internal part generates a pressure distribution inside. This pressure acting upon the rotor surface yields a non-linear hydrodynamic force which depends on its position and the fluid condition in the journal bearings. The acknowledgment of these forces is of fundamental importance in the analysis of the vibratory motion for the equipments. This work consists in the presentation of non-linear mathematical models that are able to represent the hydrodynamic force exerted by the oil in the bearings of a rotating machine, assembled on a vertical and flexible shaft. The non-linear forces are evaluated using an analytical method based in the orbital position of the rotor axis. These forces, as well as those from eccentric unbalance, are the excitation sources for the system and are included in its equation of motion. A particular characteristic of this method is the speed obtained to calculate the non-linear forces. In order to complete the work, the characteristic dynamical behavior of the system to this excitation is analyzed by means of the orbits graphically plotted for some running conditions.

Key Words: Mathematical model; Simulation (Computers); Rotor dynamics.

SUMÁRIO

Resumo.....	vii
Abstract	viii
SUMÁRIO	ix
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas.....	xv
Lista de Abreviaturas e Siglas.....	xvi
1 INTRODUÇÃO	1
2 ESTADO DA ARTE	5
3 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA.....	13
3.1 Introdução	13
3.2 Mancais Hidrodinâmicos Cilíndricos	17
3.2.1 Introdução.....	17
3.2.2 Distribuição da Pressão no Filme de Óleo	20
3.3 Mancais Hidrodinâmicos Segmentados	26
3.3.1 Introdução.....	26
3.3.2 Distribuição da Pressão no Filme de Óleo	29
4 MODELOS MATEMÁTICOS	35
4.1 Introdução	35
4.2 Modelo Matemático para Mancal Cilíndrico	35
4.2.1 Força Hidrodinâmica	36
4.3 Modelo Matemático para Mancal Segmentado	69
4.3.1 Introdução.....	69
4.3.2 Força Hidrodinâmica	71
5 DESCRIÇÃO DO SISTEMA ANALISADO.....	91
5.1 Introdução	91
5.2 Esquema do Rotor	92
5.3 Modelo por Elementos Finitos.....	95
5.3.1 Introdução.....	95
5.3.2 Elemento Viga	100
5.3.3 Elemento Disco Rígido.....	102
5.3.4 Elemento Mancal	103
5.4 Esquema dos Mancais Analisados	105
5.4.1 Mancal Cilíndrico.....	105
5.4.2 Mancal Segmentado	107
5.5 Filme de Óleo	109
5.6 Força de Desbalanceamento.	110

6 SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS OBTIDOS	113
6.1 Introdução	113
6.2 Resposta em Frequência	118
6.2.1 Modos Próprios do Rotor	118
6.2.2 Análise dos Casos Estudados	120
6.2.2.1 Modelo de Rotor com Mancal Cilíndrico	120
6.2.2.2 Modelo de Rotor com Mancal Segmentado	123
6.3 Resultados para Mancal Cilíndrico	124
6.3.1 Efeito do Desbalanceamento a 100 [rd/s]	124
6.3.2 Efeito da Posição de Partida	129
6.3.3 Comportamento à Diversas Velocidades Partindo do Repouso	130
6.3.4 Efeitos Whip/Whirl do Filme de Óleo	135
6.3.5- Efeito de uma Perturbação tipo Impulso	138
6.4 Resultados para Mancal Segmentado.	143
6.4.1 Efeito do Desbalanceamento a 100 [rd/s]	143
6.4.2 Efeito da Posição de Partida	147
6.4.3 Comportamento à Diversas Velocidades Partindo do Repouso	149
6.4.4 Verificação da Instabilidade do Filme de Óleo.	156
7 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	159
Referências	161

Lista de Figuras

3.1	Esquema Representativo de um Sistema Dinâmico Rotor-Mancal-Estrutura	16
3.2	Esquema Representativo de um Mancal Tipo Cilíndrico Plano e seu Sistema de Referência	19
3.3	Mancal cilíndrico: principais características geométricas	21
3.4	Espessura do filme de óleo (a) eixo centrado e (b) eixo descentrado	24
3.5	Esquema representativo de Mancal Segmentado e sua geometria.	28
3.6	Esquema representativo de mancal segmentado com (a) rotor centrado sem movimento ($\omega = 0$) e (b) rotor descentrado e em movimento ($\omega \neq 0$)	30
3.7	Relações trigonométricas no mancal segmentado	32
4.1	Figura 4.1: Componentes F_x e F_y da força hidrodinâmica	37
4.2	Figura 4.2: Relações Geométricas no Mancal Cilíndrico Plano (a) vista especial (b) vista no plano x,y	38
4.3	Relações Trigonométricas no Mancal Cilíndrico.	45
4.4	Esquema representativo de seção transversal do rotor-mancal segmentado (a) representação para uma pá , rotor centrado e (b) mesma seção, descentrado.	70
5.1	Esquema representativo do Rotor montado em Estrutura de Suporte	93
5.2	Principais dimensões para o modelo de rotor vertical. Medidas em [mm].	94
5.3	Esquema representativo do modelo do rotor dividido em elementos. (a) vista espacial e (b) vista no plano	97
5.4	Esquema do modelo por elementos finitos para rotor vertical e seus deslocamentos nodais	98

5.5	Esquema representativo de um elemento viga	100
5.6	Representação do nó de atuação das componentes das forças do filme de óleo	104
5.7	Esquema representativo do modelo de cilíndrico e sua geometria	106
5.8	Esquema representativo do modelo de cilíndrico e sua geometria	107
5.9	Representação esquemática do rotor em movimento (a), e da seção transversal do disco onde age o desbalanceamento síncrono	111
5.10	Representação esquemática do nó de atuação das componentes da força de desbalanceamento	112
6.1	Representação esquemática do modelo de rotor e sua seção Transversal no nó 4 - mancal cilíndrico (a) sistema em repouso, eixo centrado. (b) sistema em Movimento	114
6.2	Representação do modo de vibrar de rotor horizontal, extraída de VANCE [37]	120
6.3	Amplitude do Deslocamento - mancal cilíndrico, nó=4	122
6.4	Amplitude do Deslocamento - mancal cilíndrico, nó=2	122
6.5	Amplitude do Deslocamento - mancal segmentado, nó=4	124
6.6(a)	Deslocamento em x	125
6.6(b)	Deslocamento em y	125
6.6(c)	Amplitude do deslocamento x Rotação (nó=7, $U=1,0 \cdot 10^{-5}$)	126
6.7(a)	Deslocamento em x	127
6.7(b)	Deslocamento em y	127
6.7(c)	Amplitude do deslocamento x Rotação (nó=7, $U=1,0 \cdot 10^{-4}$)	128
6.8	Órbita descrita pelo rotor partindo da posição apoiada no nó 1 e centrada no nó 4	130

6.9	Amplitude do deslocamento x Rotação (nó= 7, w =10[rd/s]; U=1,0.10-05)	131
6.10(a)	Deslocamento em x, w=30 [rd/s]	132
6.10(b)	Deslocamento em y, w=30 [rd/s]	132
6.10(c)	Amplitude do deslocamento x Rotação (nó = 4, w =30 [rd/s]; U=1,0.10-05)	133
6.11(a)	Deslocamento em x, w=60 [rd/s]	133
6.11(b)	Deslocamento em y, w=60 [rd/s]	134
6.11(c)	Amplitude do deslocamento x Rotação (nó = 4, w = 60 [rd/s]; U=1,0.10-05)	134
6.12	Amplitude do Deslocamento - mancal cilíndrico, nó 4	136
6.13(a)	Deslocamento em x; w=80[rd/s]	137
6.13(b)	Órbita (nó=4; w=80[rd/s])	137
6.14 (a)	Órbita (nó=4; w=30[rd/s]; F=-50[N])	138
6.14 (b)	Amplitude do Deslocamento w=30[rd/s]; F=-50[N]	139
6.15(a)	Órbita (nó=4;w=80 [rd/s]; F=+50[N])	139
6.15 (b)	Amplitude do Deslocamento w=30[rd/s]; F=-50[N]	140
6.16 (a)	Órbita (nó=4, w=100[rd/s];F=-5000 [N])	141
6.16 (b)	Amplitude do Deslocamento w=100[rd/s]; F=-5000[N]	141
6.17 (a)	Órbita (no=4 w=100 [rd/s];F=+5000[N])	142
6.17 (b)	Amplitude do Deslocamento w=100[rd/s]; F=+5000[N]	143
6.18 (a)	Deslocamento em x	144
6.18 (b)	Deslocamento em y	144
6.18 (c)	Amplitude do Deslocamento x Rotação (nó=7; U=1,0.10-5)	145

6.19 (a)	Deslocamento em x	146
6.19 (b)	Deslocamento em y	146
6.19 (c)	Órbita, nó=7, $U=1,0 \cdot 10^{-5}$	147
6.20	Deslocamento x do rotor partindo descentrado no nó 1 e centrado no nó 4.	148
6.21 (a)	Deslocamento em x	149
6.21 (b)	Deslocamento em y	150
6.21 (c)	Órbita, nó=4, $w=30[\text{rd/s}]$; $U=1,0 \cdot 10^{-5}$	150
6.22 (a)	Deslocamento em x	151
6.22 (b)	Deslocamento em y	151
6.22 (c)	Órbita, nó=4, $w=60[\text{rd/s}]$; $U=1,0 \cdot 10^{-5}$	152
6.23 (a)	Deslocamento em x	152
6.23 (b)	Deslocamento em y	153
6.23 (c)	Órbita, nó=4, $w=80[\text{rd/s}]$; $U=1,0 \cdot 10^{-5}$	153
6.24 (a)	Deslocamento em y	154
6.24 (b)	Órbita, nó=4($w=100[\text{rd/s}]$; $U=1,0 \cdot 10^{-5}$)	155
6.25 (a)	Deslocamento em y	155
6.25 (b)	Órbita, nó=4($w=100[\text{rd/s}]$; $U=1,0 \cdot 10^{-4}$)	156
6.26	Amplitude do deslocamento - mancal segmentado, nó=4	157
6.27	Amplitude do deslocamento, mancal segmentado, nó=4	158
6.28	Amplitude do Deslocamento, mancal segmentado, nó=4	158

Lista de Tabelas

5.1	Descrição física dos elementos que compõem o rotor	98
5.2	Distribuição de elementos por nós do modelo de rotor	99
5.3	Especificações do modelo de mancal cilíndrico	106
5.4	Especificações para o modelo de mancal segmentado de três pás	109

.....

Lista de Abreviaturas e Siglas

Letras Latinas

A	constante de integração
C	folga radial, amortecimento
C_{xy} e C_{yx}	matrizes acopladas de amortecimento
D,d	diâmetro, operador diferencial, distância entre dois pontos
e, e_u	excentricidade, excentricidade de desbalanceamento
E	módulo de elasticidade do material
f	força hidrodinâmica no interior do mancal
F, f_e , f_o	função analítica de integração, vetores força,
G,G',G'',	funções analíticas de integração, gravidade
H, h, h_{min}	função espessura do filme de óleo
I,I ₁ ,I ₂ ,I ₃	integrais
K	matriz de rigidez, relação L/D
L, l	comprimento
M,m	matrizes de massa, massa
O,O _r ,O _m	centro de sistema de referência, rotor e mancal
P, p_{max} , p_{min} , p_0	pressão, máxima, mínima
Q,q, \dot{q} , \ddot{q}	vetores deslocamento, velocidade e aceleração das coordenadas
R, r, r_0	raios
S,S _o	número de Sommerfeld, seção transversal
T,t	tempo, matriz transposta
U,u,	desbalanceamento, vetor deslocamento nodal
V,v	função analítica, vetor deslocamento nodal
x	deslocamento, eixo de coordenadas
y	deslocamento, eixo de coordenadas
z	deslocamento, eixo de coordenadas

W carga aplicada

.....

Letras Gregas

α	ângulo de trabalho
β	ângulo de integração
ω	velocidade de rotação
Ψ	ângulo de fixação das pás
δ	deflexão radial
ϕ	ângulo de giro, coordenada angular
μ	viscosidade do óleo
τ	tempo adimensional
$\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2$	coordenadas angulares, ângulos inicial e final da pá
ρ	massa específica
θ	coordenada angular
π	limite de integração

.....

1 INTRODUÇÃO

À apenas alguns anos da passagem do século, e novamente nos vemos experimentando mudanças. As sociedades em que nossa espécie baseou suas culturas parecem mudar mais e mais rapidamente na era do espaço cibernético. Novas políticas administrativas e governamentais, desajustes e distorções sociais, avanço tecnológico e desemprego, relações Norte-Sul, neoliberalismo e globalização, qualidade, meio-ambiente e fontes renováveis de energia...

Realmente parece haver uma mudança na energia interna do sistema global. Grandes empresas investem na Automação Industrial e na Inteligência Artificial. O mercado mundial está aberto e o Brasil, por estar inserido entre as grandes economias, sofre dos mesmos males dos países ditos desenvolvidos. As palavras mais ouvidas em termos de globalização são: competitividade, qualidade, confiabilidade, eficiência e competência e terceirização de serviços.

As indústrias necessitam cada vez mais processar maiores quantidades de matéria prima. A transformação da matéria prima em produto, e de produto em lucro é o objetivo que, em parte, depende do desenvolvimento das máquinas em geral. As máquinas também são responsáveis por manter algumas necessidades consideradas básicas por nossa espécie na atualidade: a obtenção da energia e sua transformação em calor, trabalho, e movimento. A energia proveniente da eletricidade, que pode ser produzida nas indústrias termo-hidro/elétricas e nucleares, é gerada através das máquinas rotativas.

Os níveis de produção, seja na indústria de transformação de matéria prima em produto ou de fontes naturais em energia, estão relacionados com o desempenho dos tipos de máquinas. Para cumprir este objetivo, o projeto de máquinas e equipamentos tenta otimizar a obtenção de potência, ou trabalho, minimizando custos de produção (máquinas mais baratas) e de operação (máquinas mais econômicas), dentro de limitações. Assim, pode ser necessário o projeto, por exemplo, de uma turbina de usina hidroelétrica que atenda à limitação de diâmetros, devido às condições geográfico-geológicas do local de instalação da represa.

Outro fator que está diretamente relacionado aos níveis de produção é a manutenção dos equipamentos do setor produtivo. Algumas metodologias de manutenção hoje empregadas pela

indústria são: Corretiva, Preventiva e Preditiva. Um grande número de indústrias faz uso da metodologia corretiva e apenas substitui as partes que se quebram. Na manutenção preventiva, muito empregada, por exemplo, nos setores químico e metalúrgico, a parada para substituição de partes ocorre regularmente em intervalos pré-fixados. A última metodologia emprega conhecimentos mais recentes, como por exemplo, a manutenção preditiva por análise de sinais. Nesse caso um histórico dos níveis de vibração do equipamento rotativo auxilia na elaboração de planos de paradas do equipamento, possibilitando acordos entre a produção e a manutenção da indústria.

A abertura de um mercado que esteve fechado e protegido expôs a indústria nacional à concorrência e, conseqüentemente, à uma crise. Uma das saídas para esta situação é aprimorar as máquinas seja pelo melhor projeto, seja pela melhor manutenção, garantindo maior confiabilidade tanto em fornecimento ou produção de energia quanto na fabricação de produtos.

Para um projeto definitivo eficiente de uma máquina rotativa, é necessário o conhecimento prévio de seu comportamento nas condições de operação. Uma avaliação prévia dos níveis de vibração que serão gerados internamente permite evitar projetos que falhem sob o aspecto dinâmico, como, por exemplo, em ressonância.

Assim, este trabalho visa contribuir para o melhor entendimento de algumas características dinâmicas de um modelo matemático proposto para uma máquina rotativa de eixo vertical, interligada à estrutura de montagem por meio de dois tipos de mancais hidrodinâmicos. O trabalho pode ser entendido como a análise prévia de um sistema físico que pode estar sendo projetado, ou de alguma máquina existente e em operação, cujos níveis de amplitude de vibração excederam ou tendem a exceder limites físicos do equipamento.

O Capítulo 2 descreve as origens e o desenvolvimento da análise do comportamento dinâmico das máquinas, baseados nos problemas surgidos no final do século passado pelas composições ferroviárias. É um breve resumo dos passos que nos trouxeram até a simulação de fenômenos em computadores.

O problema especificamente analisado está descrito no capítulo 3. Na primeira seção apresenta-se a equação de movimento para o sistema simulado, bem como uma ilustração do tipo

de máquina e sua disposição. São comentadas algumas condições e suposições consideradas na modelagem. As seções seguintes apresentam as expressões para as funções que definem a espessura do filme de óleo para os dois tipos de mancais hidrodinâmicos analisados: o cilíndrico plano e o segmentado. A dedução destas funções é realizada para os sistemas de referência dos dois tipos de mancais. Cada subseção é finalizada com a apresentação das funções que definem as distribuições de pressões geradas no filme de óleo no interior dos mancais

A força hidrodinâmica não-linear dos mancais, devida à distribuição da pressão gerada pelo atrito viscoso no movimento relativo entre as partes internas, induz uma vibração sobre o rotor neste ponto do sistema. O modelo matemático que representa as componentes das forças não-lineares para os dois tipos de mancais [7][10][15] são apresentados no capítulo 4. As forças hidrodinâmicas geradas pelo mancal cilíndrico plano são representadas por um modelo matemático deduzido na seção 4.2. O mesmo procedimento para o mancal hidrodinâmico tipo segmentado é demonstrado na seção 4.3.

A seguir, o capítulo 5 traz uma descrição das características físicas que o modelo matemático utiliza para simular o sistema dinâmico. São os dados, provenientes de projeto ou de manutenção, para modelar o equipamento. O rotor, sua interligação com a estrutura de montagem, o disco rígido, a força de excitação e os efeitos modelados encontram-se descritos nestas seções. Faz-se uma descrição do modelo matemático do eixo pelo Método dos Elementos Finitos.

Os parâmetros empregados na simulação numérica, bem como o procedimento matemático utilizado na solução numérica das equações são mostrados no capítulo 6. Uma descrição do método numérico para solução de equações diferenciais de Newmark é apresentada na primeira subseção. A seguir, são comentados os casos estudados e os parâmetros para as simulações. Na subseção 6.3 são apresentados os resultados das simulações em diferentes condições, realizadas para o modelo de mancal tipo cilíndrico. Os casos estudados para o modelo de mancal hidrodinâmico segmentado são apresentados na subseção 6.4.

As conclusões sobre a análise do comportamento dinâmico observado para o modelo proposto de máquina rotativa vertical são apresentadas no capítulo 7. Neste capítulo também são abordadas as perspectivas futuras para o trabalho dentro da área da dinâmica de rotores.

2 ESTADO DA ARTE

Mancais hidrodinâmicos, vistos de maneira simplista, são os elementos de conexão entre as partes girantes (rotor), e as fixas (estrutura de suporte) de sistemas rotativos. São estes elementos que sustentam o rotor.

Tiveram sua origem com o desenvolvimento das máquinas na era da revolução industrial. A lubrificação dos eixos das rodas de composições ferroviárias estimulava os pesquisadores da época a resolver os problemas gerados pelo atrito interno entre eixos e suportes, que causava elevadas perdas e altos níveis de calor.

A questão do atrito entre superfícies motivou o russo *Petrov* e os ingleses *Tower* e *Reynolds*, trabalhando contemporânea e independentemente, a resolverem os problemas fundamentais da hidrodinâmica, equacionando o comportamento do filme de óleo existente entre as superfícies das partes móveis e/ou fixas, surgindo assim um novo ramo de estudos na Engenharia chamado de **Tribologia**.

Os primeiros estudos relacionados à influência do comportamento dinâmico dos mancais sobre as máquinas rotativas são datados de 1883 e 1885 por *Tower*, onde foi relatado o fato de que um rotor quando corretamente colocado em movimento de rotação seria sustentado pelo filme de óleo. Em 1884, com algumas simplificações nas equações de Navier-Stokes, *Reynolds* estabeleceu a equação diferencial para o perfil de pressões que age entre duas superfícies em movimento, devida à variação da pressão interna no filme de fluido existente entre estas superfícies [8].

Assim *Petrov* e *Tower*, que trabalhavam no campo experimental, tiveram seus trabalhos confirmados teoricamente pela publicação em 1884, por *Reynolds*, de sua equação diferencial, que explica a natureza hidrodinâmica da lubrificação. Após a publicação desta equação houve um salto significativo no interesse pelo estudo dos mancais hidrodinâmicos.

Outros tipos de mancais foram desenvolvidos entre o final do século passado e o início deste, e alguns utilizavam outros fluidos lubrificantes, como o desenvolvido por *Kingsbury* em 1897, que utilizava um fluido compressível (ar). O mesmo *Kingsbury* e o australiano *Michell*

desenvolveram simultaneamente e sem conhecimento dos trabalhos individuais realizados, o mancal do tipo **segmentado** (Tilting-Pad), cujas patentes foram conseguidas em 1905 por *Michell* e em 1910 por *Kingsbury* [32].

A equação diferencial desenvolvida por Reynolds é do tipo parcial não homogênea, com coeficientes variáveis e de complexa resolução analítica. Ela descreve, em sua forma simplificada, o desenvolvimento da pressão interna nas direções circunferencial e axial do mancal. Uma limitação para a resolução da equação de Reynolds, por muito tempo, foi o desconhecimento das condições de contorno necessárias para sua integração, diretamente relacionadas ao conhecimento da pressão do filme de óleo nas extremidades do mancal.

O trabalho publicado por Reynolds apresentou muitos conceitos novos para o nível do conhecimento dos pesquisadores da época, tais como: folga radial, a relação com o fenômeno de cavitação nas partes divergentes dos mancais, e o próprio conceito de *mancais infinitamente longos*, desprezando o termo referente ao fluxo do fluido e os gradientes de pressão na direção axial.

Em 1904, *Sommerfeld* publicou sua solução para a equação de Reynolds, para mancais longos, integrando as expressões conhecidas e estabelecendo novas condições de contorno para ela. A aplicação dessas condições de contorno tornou-se uma tradição entre os pesquisadores por longo tempo, embora falhassem para certas condições específicas. Nos trabalhos mais recentes as condições de contorno de Reynolds têm sido amplamente utilizadas, pela impossibilidade experimental de verificação da solução teórica apresentada por *Sommerfeld* [8].

Em 1925, *Stodola* percebeu que um mancal não podia ser considerado como um suporte rígido, mas representava um conjunto de molas e amortecedores cujas características tinham efeito sobre os comportamentos dinâmicos do rotor. Neste mesmo ano, *Newkirk* encontrou uma vibração no eixo que não poderia ser atribuída nem ao desbalanceamento nem ao atrito interno, provocando instabilidade e chamou o fenômeno de “**Oil Whip**” originalmente e posteriormente de **Whirl de Meia Frequência** [32].

No período seguinte, entre 1925 e 1945, que compreende os finais da primeira e da segunda guerras mundiais, houve uma estagnação no desenvolvimento até então experimentado pela Tribologia.

A idéia de um mancal infinitamente curto, onde a relação comprimento (L) sobre o diâmetro (D) fosse igual à zero foi proposta por *Michell* em 1929, quando ele sugeriu a simplificação do termo responsável pela variação da pressão na direção circunferencial na equação de Reynolds. A seguir *Cardullo* em 1930 integrou esta expressão. Em 1949, *Czameron e Wood* apresentaram soluções para os mancais plenos, com relações L/D variando de infinito até 1/4 e em 1954 *Sassenfeld e Walter* resolveram-na para mancais de arcos de 360° e 180°, usando um algoritmo gaussiano. A solução completa e detalhada da equação de Reynolds para mancais curtos foi apresentada em 1952 por *Ocvirk*. [32].

Com a chegada dos computadores digitais após a segunda guerra, houve um grande incremento no número de pesquisadores empenhados em conseguir melhores soluções para a equação de Reynolds. A década de 50 trouxe uma contribuição enorme para a solução da equação diferencial de Reynolds.

Um dos primeiros trabalhos publicados utilizando-se computadores digitais para a solução desta equação diferencial, é datado de 1956, realizado por *Pinkus*, que obteve soluções para alguns tipos de mancais com diferentes geometrias e relações entre comprimentos e diâmetros [32]. Outro trabalho do tipo foi realizado por *STERNLICHT* [34], em 1957, que estudou o comportamento durante a operação de alguns mancais, e seus resultados foram utilizados para o aprimoramento do projeto destes. Foram estudadas variações de parâmetros como pressão, perfil de temperaturas, fluxos e carregamentos.

Nessa época, os trabalhos realizados visavam a compreensão dos fenômenos físicos ligados ao comportamento dinâmico dos mancais nos equipamentos rotativos sob o enfoque da lubrificação. Assim, houve um grande esforço dos pesquisadores na realização e divulgação de experimentos com variações de parâmetros, aos quais pudessem ser atribuídas as causas das instabilidades nos mancais hidrodinâmicos. Muitos foram os experimentos com as mais diversas

geometrias para mancais, como os de arco parcial, os multi-lobados e os cilíndricos planos, entre outros.

Em 1956, **SMITH e FÜLLER [35]** estudaram um mancal cilíndrico operando em velocidades super laminares, denominação usada para caracterizar a velocidade rotacional que causa a quebra do fluxo laminar. A seguir, **PINKUS [31]** em 1958 publicou a solução da equação de Reynolds para mancais finitos, tendo estudado os casos para mancais do tipo arco parcial de 75° e 100° com resultados obtidos para relações L/D entre 1 1/2 até 1/4, comparando seus resultados aos obtidos por outros pesquisadores e complementando-os.

Em 1959, **CONSTANTINESCU [13]** publicou um extenso trabalho sobre o escoamento em regime turbulento e obteve soluções aproximadas para a distribuição de velocidades dentro da camada de lubrificante. Comparou seus resultados aos obtidos por **SMITH e FÜLLER [35]**. No mesmo ano, **HORI [22]** pesquisou o fenômeno do “*Oil Whip*”, já estudado por outros, e relatou a possibilidade de se explicar o efeito de inércia através da distinção entre pequenas e grandes vibrações no “*Oil Whip*”.

WARNER [38] em 1963 estudou as propriedades estáticas e dinâmicas de um mancal hidrodinâmico de arco parcial de 120°, e em 1964, **LUND [26]** percebeu que os mancais apresentam características físicas que podem ser descritas pelas forças proporcionais a deslocamentos e velocidades, e publicou um método para o cálculo de coeficientes de amortecimento e rigidez linearizados a serem usados nas equações de movimento para representação dos mancais hidrodinâmicos, fornecendo curvas características para estes coeficientes.

Nesse período muitos estudos foram realizados para formular os problemas matematicamente e relacioná-los às observações experimentais. A teoria da lubrificação hidrodinâmica estava amadurecendo e a equação de Reynolds já havia sido resolvida para quase todas as configurações geométricas tanto para lubrificantes líquidos quanto para os gasosos. Um marco desta época foi a percepção de que os mancais não poderiam ser estudados isoladamente das características dinâmicas dos rotores, surgindo um novo enfoque além da lubrificação, denominado Dinâmica de Rotores [32].

Nas décadas seguintes, com o desenvolvimento das máquinas rotativas convergindo para a era dos turbo-rotor, ou rotores em condições de altas velocidades de rotação e altas cargas aplicadas, sejam de posicionamento horizontal ou vertical, houve um grande investimento nesta área. Em 1976, **KIRK e GUNTER [23][24]** publicaram dois trabalhos sobre a análise para mancais curtos aplicada à dinâmica de rotores, resolvendo as equações de Reynolds para mancais cilíndricos. Apresentaram as expressões para o cálculo das componentes da força não-linear exercida pelo filme de óleo no mancal hidrodinâmico cilíndrico, para rotores verticais e horizontais, incluindo-a como força externa no lado direito da equação de movimento. Plotaram tridimensionalmente os perfis da pressão atuante no mancal, além de várias órbitas e ilustrações do efeito *Whirl* para rotores com diferentes desbalanceamentos.

Baseado nos trabalhos de **KIRK e GUNTER [23][24]**, **CAPONE [5]**, em 1986, apresentou um procedimento para avaliação da força hidrodinâmica presente num mancal cilíndrico com um rotor rígido, simétrico e horizontal, em regime de lubrificação isotérmica, laminar e estacionária, cujas órbitas descritas pelo centro do rotor com relação ao centro do mancal foram plotadas. As componentes da força hidrodinâmica não-linear que atua no sistema foram obtidas pela solução da equação de Reynolds para a hipótese de mancal curto.

O método é interessante pela introdução de uma função analítica, cujas derivadas duplas parciais em expressões combinadas com termos que incluem as posições e as velocidades das coordenadas cartesianas de um sistema de referência fixado ao rotor com relação a outro fixado no centro do mancal, fornecem as componentes da força hidrodinâmica não-linear. Essa força é, então, incluída no lado direito da equação diferencial matricial que descreve o movimento do sistema rotor e mancal, a qual é integrada por um procedimento numérico de Runge-Kutta de quarta ordem. Os resultados de seu procedimento foram comparados aos obtidos por **[23][24]**.

Em 1987, por ocasião do centenário de publicação da teoria hidrodinâmica da lubrificação por Reynolds, dois artigos muito interessantes foram publicados por **DOWSON [17]** e **PINKUS [32]**. O primeiro trabalho relata as origens da teoria da lubrificação e suas dificuldades inerentes, e o segundo é um extenso histórico sobre a teoria em si, abrangendo os primeiros passos desde seu surgimento até as linhas de pesquisa atualmente em desenvolvimento. O trabalho relatou os

esforços para a solução da equação diferencial proposta por Reynolds, para as mais diferentes configurações geométricas de mancais hidrodinâmicos e serve como boa leitura para todos os interessados em Tribologia.

Nesse ano ainda, **HASHIMOTO *et al.* [19]** analisaram teoricamente os problemas dinâmicos característicos de mancais com escoamento turbulento para a hipótese de mancais curtos. Obtiveram as forças do filme de óleo considerando os efeitos da turbulência. O trabalho expõe uma análise linearizada da estabilidade para um rotor rígido horizontal suportado por dois mancais hidrodinâmicos simétricos e idênticos. Foram considerados sistemas rotor-mancal com e sem desbalanceamento e suas órbitas, bem como demonstradas as curvas características para coeficientes dinâmicos de rigidez e amortecimento.

Em 1988, **HASHIMOTO *et al.* [20]** publicaram um trabalho com a solução da equação diferencial de Reynolds para um mancal hidrodinâmico curto considerando-se os efeitos combinados de inércia e turbulência do fluido em velocidade superlaminar.

Em 1990 **CAPONE [6]** empregou seu método, agora com enfoque para as condições de lubrificação hidrodinâmica não laminares e instáveis, considerando os efeitos das forças de inércia das partículas de fluido. A análise foi realizada para mancais tipo curto, rotor rígido e simétrico com estrutura de suporte rígida.

Assim, à medida que as condições de operação para os rotores foram tornando-se cada vez mais severas, implicando em maiores velocidades de rotação e elevados níveis de cargas aplicadas, os estudos sobre o comportamento dinâmico passaram a levar em consideração novas condições possíveis, a serem impostas aos mancais, como, variações de temperatura, viscosidade, escoamento e efeitos desestabilizadores.

Em 1991, **CAPONE [7]** aperfeiçoou seu método anteriormente proposto em 1986, pela simplificação da função analítica então apresentada, cuja solução das derivadas duplas parciais eram extremamente onerosas computacionalmente, introduzindo uma nova função analítica, a qual necessita de somente uma operação de derivação parcial. Assim, seu método para a obtenção da força hidrodinâmica e das órbitas do rotor, através desta nova função analítica, tornou-se mais

rápido, possibilitando análises mais eficientes e seguras sobre o comportamento dinâmico de um sistema.

DEDINI *et al.* [15] em 1994 aplicaram o método proposto em [7] para analisar o comportamento dinâmico de um sistema com um mancal hidrodinâmico cilíndrico, montado em um rotor vertical flexível. A posição orbital do rotor com relação ao mancal foi analiticamente avaliada, inicialmente para o caso do rotor não carregado e, posteriormente, para as forças num mancal carregado. Os resultados da simulação numérica foram comparados aos experimentos realizados em [7], revelando coerência e concordância dos resultados.

Em 1995, **CAVALCA *et al.* [10]** verificaram experimentalmente os resultados obtidos em [15] para as órbitas de rotores flexíveis verticais com mancal cilíndrico, comparando resultados analíticos e experimentais com boa concordância. Foi desenvolvido um procedimento analítico que possibilita a análise do comportamento dinâmico de rotores montados sobre mancais hidrodinâmicos do tipo segmentado (Tilting-Pad), considerando-se toda a complexidade geométrica das pás deste tipo de mancal. Realizou-se também uma simulação numérica do mancal para o mesmo modelo de rotor apresentado em [15].

Assim, dentro do atual estágio da Dinâmica de Rotores, que compreende o estudo dos movimentos vibratórios dos mancais hidrodinâmicos e suas interações com as estruturas, situa-se a predição em projetos, ou seja, a Dinâmica de Rotores procura desenvolver modelos matemáticos de sistemas físicos antes mesmo de seu projeto na tentativa de auxiliá-lo com as importantes informações a respeito de seu comportamento quando colocado em operação, ou de modelagem de sistemas físicos existentes. Um outro estágio da Dinâmica de Rotores é sua utilização no ramo da manutenção mecânica. Por exemplo: uma antiga máquina rotativa já instalada há algum tempo em uma indústria, cuja documentação técnica inexistente desde sua instalação ou perdeu-se ao longo dos anos, pode começar a apresentar um crescimento no nível das vibrações, desconhecido e incompreendido pelos engenheiros que atualmente trabalham na manutenção da empresa. Neste caso, o estudo dinâmico do equipamento, através da modelagem matemática e de sua simulação numérica, torna-se uma alternativa de baixo custo para a avaliação do fenômeno físico, e fornecerá subsídios técnicos sobre as tendências do

comportamento dinâmico para análises e decisões do setor produtivo. Neste contexto, este trabalho visa complementar o estudo do comportamento dinâmico de um sistema rotativo hipotético, através da dedução e emprego de modelos matemáticos de mancais hidrodinâmicos dos tipos cilíndrico plano e segmentado, apresentados em [10] e [15]. Assim, este sistema hipotético poderá tanto ser a modelagem de um novo projeto de máquina rotativa vertical, quanto o de uma máquina já existente, para fins de manutenção mecânica.

3 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

3.1 Introdução

O estudo do comportamento dinâmico de máquinas rotativas é a Dinâmica de Rotores que pode ser descrito como, principalmente, o estudo das vibrações nos eixos e suas fontes de excitação. Rotores, neste trabalho, será a denominação utilizada para descrever os eixos e todos os elementos a ele acoplados, tais como: motores, acionadores, discos, lâminas, agitadores, hélices, mancais, selos e outros. Compreende as partes móveis de máquinas rotativas.

O rotor pode ser rígido ou flexível, e têm suas características e propriedades físicas dependentes de fatores como materiais e geometrias envolvidas. Pode ser simétrico, incluir desalinhamentos, acoplamentos entre seções ou não, mas certamente terá um desbalanceamento provocado pelas excentricidades inerentes à condição anisotrópica do material, inevitável [2].

A **interligação** entre a parte móvel, que é o **rotor**, e a fixa e sua fundação no solo, que é chamada **estrutura de montagem**, é denominada **Mancal**. Esse nome designa o elemento físico responsável pelo suporte do rotor em certos sistemas e por direcionar também o movimento lateral do rotor, em outros. Mancais hidrodinâmicos são aqueles que operam de acordo com a teoria da lubrificação hidrodinâmica proposta por Reynolds em 1884, como já exposto [32]. Quando o rotor é colocado em operação, partindo do repouso, o filme de óleo existente entre sua superfície e a da parte interna do mancal é o responsável pela sustentação do rotor em seu movimento.

Com a proposição de sua teoria, Reynolds formulou uma equação diferencial que, a partir do fluxo interno de óleo no mancal, define o campo de pressão distribuído nas paredes internas como uma função da posição orbital do eixo. Esta distribuição de pressão pode ser integrada para definir as forças desenvolvidas pelo mancal, agentes sobre um rotor, como uma função dos vetores posição e velocidade do rotor no interior do mancal, bem como dependentes da geometria do mancal, da temperatura e da viscosidade do lubrificante, e das condições de seu escoamento, por exemplo.

A equação diferencial de Reynolds é de segunda ordem, parcial, do tipo não homogênea, e de coeficientes variáveis. Com o desenvolvimento da Dinâmica de Rotores, muitas foram as soluções apresentadas para as diferentes geometrias de mancais hidrodinâmicos, sob as mais diversas condições de operação.

Na realidade as forças que agem entre as partes móveis e as estacionárias em equipamentos rotativos não estão restritas somente àquelas exercidas pelos mancais, mas também estão relacionadas às características de operação de cada tipo de equipamento. Assim, em máquinas elétricas existem forças de natureza eletromagnéticas, em bombas centrífugas existem as forças hidráulicas nos selos de fluxo, e nos compressores há a presença de forças aerodinâmicas, por exemplo, entre outras.

As máquinas rotativas podem exibir movimentos vibratórios de caráter flexural, axial ou torsional. Geralmente a vibração flexural é a mais estudada, não se desprezando a importância da análise dos outros tipos de vibrações, para certos sistemas rotativos. Essas vibrações podem ser forçadas ou auto-excitadas [37].

O conhecimento dos fenômenos de vibração dos rotores possibilitou a concepção da importância da Dinâmica de Rotores como a convergência de duas áreas de pesquisa: a) Dinâmica de Vibrações em Estruturas e b) Análise de Mancais Hidrodinâmicos [2] [12]. Este fato levou-a a ocupar uma posição de destaque na Engenharia, por ser, atualmente, um procedimento indispensável em uma fase *anterior* ao projeto de equipamentos rotativos. Ou seja, o conhecimento do comportamento dinâmico destes sistemas através de modelos matemáticos elaborados antes do projeto definitivo pode levar a “predição” de eventuais problemas após a construção e montagem dos equipamentos, principalmente com relação aos níveis das amplitudes dos deslocamentos devidos ao movimento vibratório do rotor e, especialmente, quando há a passagem por alguma de suas velocidades críticas no caminho para a velocidade de operação.

Assim, dentro do contexto da simulação numérica de modelos matemáticos para o estudo de seu comportamento dinâmico, que pode tanto ser usada para “prever” o comportamento de um modelo a ser projetado, quanto representar um equipamento já em operação, o problema aqui analisado consiste na verificação do procedimento matemático apresentado por **CAVALCA et al.**

[10] em 1995 para representar as forças fluidodinâmicas não-lineares provocadas pelo campo de pressões presente nos mancais hidrodinâmicos do tipo segmentado, em um rotor vertical flexível.

Para analisar o comportamento de um sistema dinâmico com estas características, são realizadas simulações numéricas para dois tipos de mancais: a) o mancal tipo cilíndrico e b) o mancal tipo segmentado. As simulações objetivam a observação de seu comportamento por meio das órbitas descritas pelo movimento do centro do rotor com relação à um sistema de referência fixo no centro do mancal. São simuladas algumas condições de operação para um modelo proposto de rotor.

Para um sistema dinâmico como o ilustrado na Figura 3.1, composto por uma estrutura rígida, um rotor flexível vertical com um conjunto motor-acionador acoplado à sua parte superior, um disco rígido acoplado à sua parte inferior e um mancal hidrodinâmico localizado em seu centro e interligando o rotor à estrutura, a equação diferencial que descreve o movimento do sistema é dada pela expressão:

$$[M]\ddot{q}(t) + [C]\dot{q}(t) + [K]q(t) = \{f_e\} + \{f_o\} \quad (3.1)$$

onde..

[M] Matriz de Massa

[C] Matriz de Amortecimento, que inclui a Matriz Giroscópica

[K] Matriz de Rigidez

$\{f_e\}$ Vetor Forças Externas

$\{f_o\}$ Vetor Forças do Filme de Óleo

$\{\ddot{q}\}$ Vetor aceleração das coordenadas do centro do eixo

$\{\dot{q}\}$ Vetor velocidade das coordenadas do centro do eixo

$\{q\}$ Vetor deslocamento das coordenadas do centro do eixo

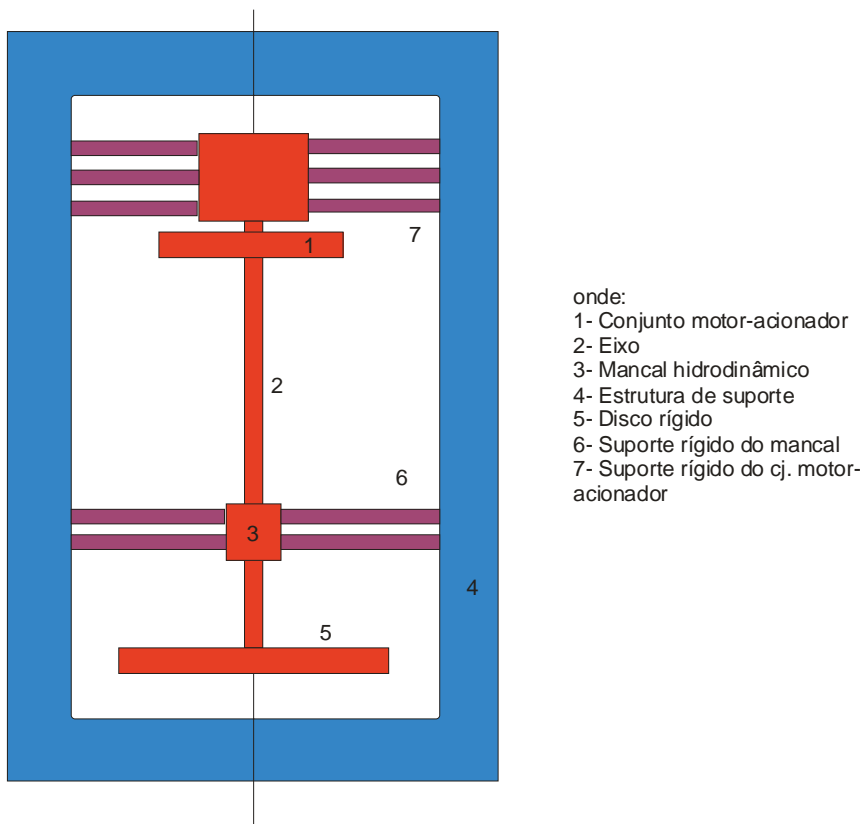


Figura 3.1: Esquema Representativo de um Sistema Dinâmico Rotor-Mancal-Estrutura

Na equação (3.1) o vetor forças externas $\{f_e\}$ pode agir em qualquer ponto do rotor. Neste estudo, as forças externas estarão agindo na mesma seção do Disco Rígido e serão devidas à excentricidade de massa, que causa um desbalanceamento no rotor. O vetor $\{f_o\}$, que representa as forças exercidas pelo filme de óleo, contém as forças não-lineares, dependentes da posição e da velocidade do centro do rotor com relação ao centro do mancal.

As características dinâmicas das máquinas rotativas são fortemente influenciadas pelos mancais sobre os quais giram o rotor. O comportamento do sistema pode ser estudado pela modelagem matemática dos parâmetros físicos envolvidos em seu movimento. A matriz $[M]$ representa as características dinâmicas das massas envolvidas no movimento. Inclui a massa distribuída do eixo, e as massas concentradas do conjunto acionador-motor e do disco rígido, além da massa do mancal hidrodinâmico. A matriz $[C]$ representa as características das forças

proporcionais às velocidades envolvidas no movimento, incluindo o amortecimento do sistema motor-acionador, além da matriz que contém os efeitos giroscópicos do rotor. A rigidez do sistema está representada pela matriz $[K]$, que inclui as características das forças proporcionais aos deslocamentos presentes no movimento, do eixo e do conjunto acionador.

Em uma análise linear de sistemas dinâmicos, o elemento mancal pode ser matematicamente linearizado para pequenos deslocamentos em torno de sua posição de equilíbrio estático, o que permite o estabelecimento de coeficientes equivalentes de amortecimento e rigidez, que são incluídos nas matrizes $[C]$ e $[K]$ da equação (3.1)[26].

Porém, neste trabalho as forças fluido-dinâmicas geradas pelo filme de óleo nos mancais não serão linearizadas sendo incluídas na equação do movimento (3.1) como forças excitadoras, em seu lado direito. Consideram-se assim os efeitos da não-linearidade envolvida no movimento. Após a modelagem das componentes desta força hidrodinâmica gerada pelo filme de óleo, a equação do movimento será integrada por um procedimento numérico segundo Newmark [3], possibilitando a análise através da órbita gráfica, obtida pela solução numérica, descrita pelo centro do eixo com relação ao centro do mancal.

Com o objetivo de introduzir os modelos matemáticos apresentados no próximo capítulo, expõe-se a seguir um breve resumo sobre as principais características dos dois tipos de mancais.

3.2 Mancais Hidrodinâmicos Cilíndricos

3.2.1 Introdução

O mancal cilíndrico plano é o tipo mais simples e também o mais usado entre os mancais hidrodinâmicos, na ausência de altas velocidades de rotação ou elevadas cargas aplicadas. É classificado como sendo do tipo de geometria fixa.

Na análise do comportamento de sistemas dinâmicos, um dos mais importantes parâmetros a ser considerado é o amortecimento introduzido no sistema pelo mancal

hidrodinâmico, elevado se comparado aos outros tipos de mancais. Outro parâmetro de igual importância é a rigidez [1] [37].

Para operar corretamente as máquinas rotativas com mancais hidrodinâmicos é necessário que o fluxo interno de óleo seja suficiente para refrigerá-lo. Também é muito importante o conhecimento da dimensão e da localização da espessura mínima do filme de óleo [4]. No desenvolvimento do modelo matemático apresentado no próximo capítulo, considerou-se que o mancal possui um fluxo interno isotérmico e isoviscoso, com regime de escoamento laminar e estacionário [7] [10].

O movimento relativo entre as superfícies do rotor e do mancal, na presença do filme de óleo e devido às variações do atrito do lubrificante, faz com que haja uma variação na distribuição da pressão interna. A Figura 3.2 mostra como a pressão interna é gerada num mancal cilíndrico plano. Devido ao efeito cunha (divergente e convergente), o fluido que está entre o rotor e a superfície do mancal é comprimido pelo movimento do rotor, tendo sua pressão aumentada. O fluxo de lubrificante é então formado, partindo-se da parte convergente para a divergente que apresenta menores pressões. A pressão varia devido ao atrito viscoso do lubrificante. A distribuição da pressão hidrodinâmica ao redor do rotor produz uma força que reage com a carga aplicada [37] [4].

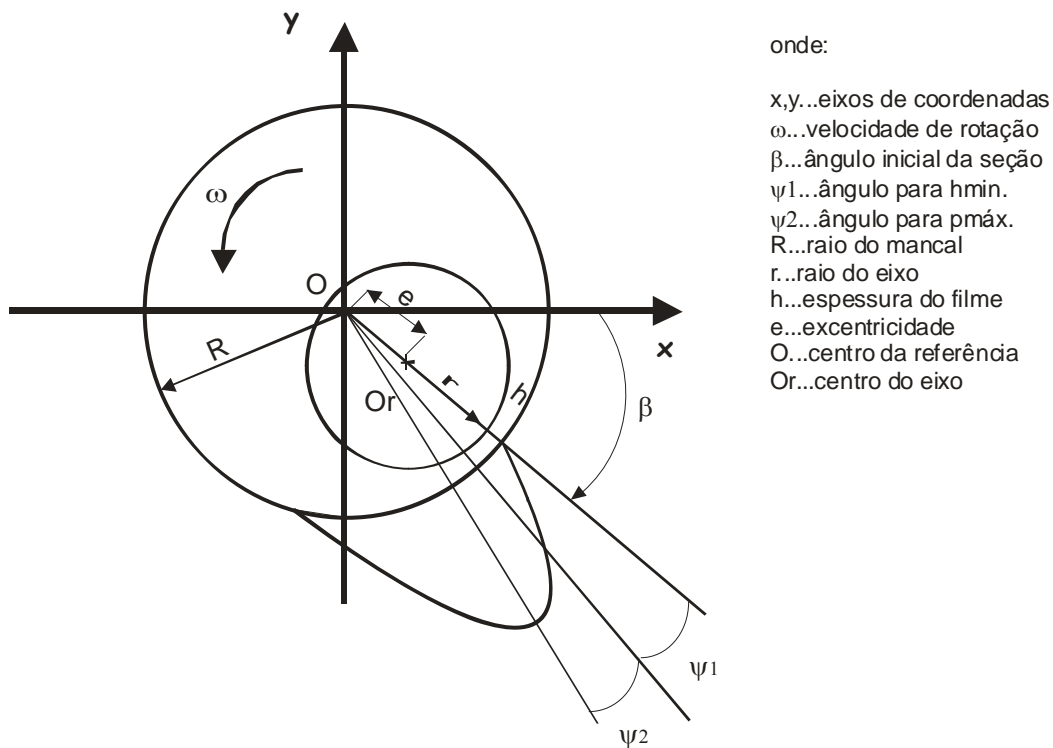


Figura 3.2: Esquema Representativo de um Mancal Tipo Cilíndrico Plano e seu Sistema de Referência

A não-linearidade causada pelos mancais hidrodinâmicos depende do movimento relativo do eixo no filme de óleo. No caso de máquinas rotativas com posicionamento vertical, este movimento é relativamente grande, pois não há uma força gravitacional agindo sobre o rotor forçando-o a encontrar um ponto de operação no mancal como no caso das máquinas de posicionamento horizontal [8].

Quando o rotor é horizontal e existe uma força estática aplicada sobre ele, há uma posição de equilíbrio onde a força desenvolvida pela pressão do filme de óleo iguala-se à carga aplicada (W), quando há movimento [37].

3.2.2 Distribuição da Pressão no Filme de Óleo

O problema básico da análise de mancais hidrodinâmicos é a determinação da distribuição da pressão devida ao filme de óleo para dada geometria de mancal. Esta distribuição de pressão é estimada pela solução da equação diferencial de Reynolds. Muitos pesquisadores resolveram esta equação para diferentes configurações de geometrias. A seguir descreve-se a equação de Reynolds em um sistema de coordenadas polares, em sua forma adimensionalizada com relação à posição.

Na Figura 3.3 representa-se o esquema de um corte na seção transversal de um rotor horizontal e do mancal com um sistema cartesiano de referência (**Oxyz**) fixo ao seu centro. A carga **W** é aplicada sobre o centro do rotor na direção do eixo cartesiano **y**, porém com sentido oposto a este. O centro **O** do sistema de referência é coincidente com o centro **O_m** do mancal e o eixo **Oz** é coincidente com o eixo central do mancal e a direção do vetor ω . A espessura do filme de óleo é chamada **h**, **C** é a folga radial do mancal

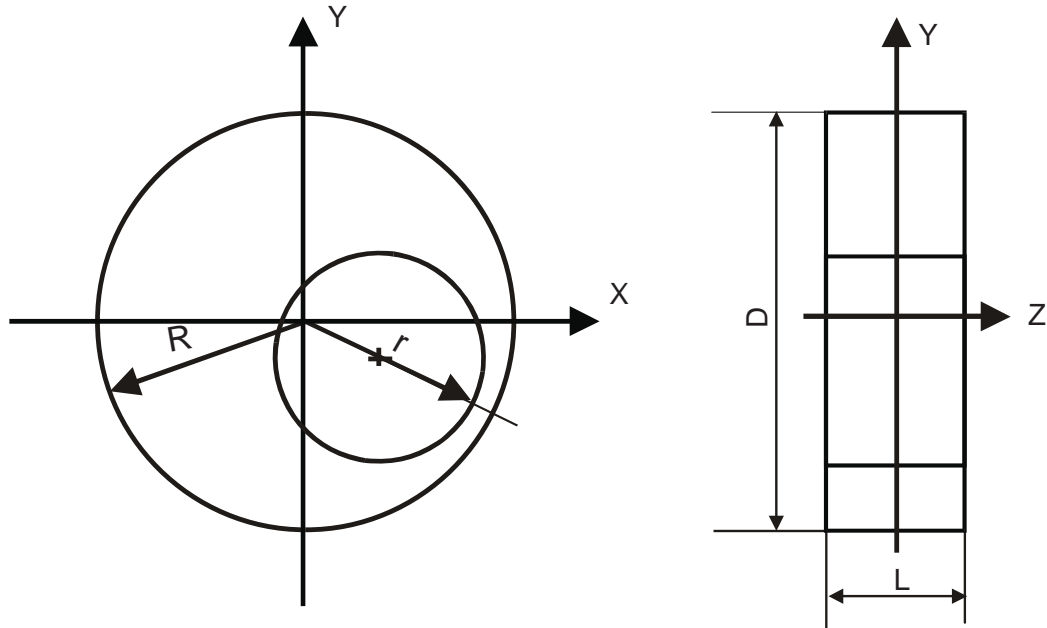


Figura 3.3: Mancel cilíndrico: principais características geométricas

As características geométricas deste mancal são dadas pela relação entre o raio $R=D/2$ e o comprimento L . A equação de Reynolds é formulada para as seguintes hipóteses, que valem para este modelo e foram muito bem definidas em [4]: Não são considerados os efeitos de outras forças, a não ser aquelas descritas na equação de movimento (3.1), como por exemplo as eletromagnéticas.

- O fluido utilizado é incompressível, ou seja, a tensão é proporcional à taxa de cisalhamento.
- O escoamento tem fluxo laminar e isotérmico.
- Os efeitos de inércia do fluido são desconsiderados.
- O fluido é isoviscoso.

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta'} \left(\frac{\bar{h}^3}{\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \vartheta'} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\bar{h}^3}{\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 6 \left(\omega \frac{\partial \bar{h}}{\partial \vartheta'} + 2 \frac{d\bar{h}}{dt} \right) \quad (3.2)$$

onde:

\bar{h}	espessura do filme de óleo	\bar{p}	pressão
R	raio do mancal	r	raio do rotor
μ	viscosidade do lubrificante	\bar{z}, ϑ	coordenadas polares
ω	velocidade de rotação do eixo.		

A equação (3.2) é tornada adimensional em relação a sua folga radial **C**:

$$h = \frac{\bar{h}}{C}, x = \frac{\bar{x}}{C}, y = \frac{\bar{y}}{C}, z = \frac{\bar{z}}{L}, k = \frac{R}{L}, \tau = \omega t, \left(\cdot \right) = \frac{d}{d\tau} \quad (3.3)$$

e a pressão $\frac{\bar{p}}{p_0} = p$, onde \bar{p} é a distribuição de pressão no mancal, e p_0 é dada pela expressão:

$$p_0 = 6\mu\omega \left(\frac{R}{C} \right)^2 \quad (3.4)$$

Substituindo-se, então, as expressões relacionadas em (3.3) e (3.4) na equação (3.2) têm-se:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta'} \left(h^3 C^3 \frac{\partial (p \cdot p_0)}{\partial \vartheta'} \right) + \frac{\partial}{\partial (zL)} \left(h^3 C^3 \frac{\partial (p \cdot p_0)}{\partial (zL)} \right) = 6\mu\omega \left(\frac{\partial (hC)}{\partial \vartheta'} + 2 \frac{d(hC)}{d(\omega t)} \right)$$

$$\frac{C^3}{R^2} p_0 \frac{\partial}{\partial \vartheta'} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \vartheta'} \right) + \frac{C^3}{L^2} p_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu\omega C \left(\frac{\partial h}{\partial \vartheta'} + 2 \frac{dh}{d\tau} \right)$$

$$\frac{C^3}{R^2} 6\mu\omega \left(\frac{R}{C} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta'} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \vartheta'} \right) + \frac{C^3}{L^2} 6\mu\omega \left(\frac{R}{C} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu\omega C \left(\frac{\partial h}{\partial \vartheta'} + 2 \frac{dh}{d\tau} \right)$$

$$\frac{C^2}{R^2} \left(\frac{R}{C} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta'} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \vartheta'} \right) + \frac{C^3}{L^2} \left(\frac{R}{C} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial h}{\partial \vartheta'} + 2 \frac{dh}{d\tau} \right)$$

Fazendo-se ϑ' tender a ϑ , e lembrando-se que $\mathbf{K}=\mathbf{R}/\mathbf{L}$, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right) + K^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial h}{\partial \vartheta} + 2 \frac{dh}{d\tau} \quad (3.5)$$

A equação (3.5) descreve como a pressão se desenvolve no interior de um mancal hidrodinâmico cilíndrico plano, em função da espessura do filme de óleo, considerando-se os gradientes circunferencial e axial devidos ao movimento do fluido lubrificante.

O método desenvolvido considera a hipótese de *mancais curtos*, onde o gradiente circunferencial de pressão pode ser desprezado em relação ao axial. Nestes mancais, a relação $K=R/L$ é maior que 1. Denotando a operação de derivação com relação ao tempo adimensional por um ponto sobre a variável, a equação (3.5) torna-se:

$$K^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial h}{\partial \vartheta} + 2\dot{h} \quad (3.6)$$

A integração depende agora do estabelecimento das relações trigonométricas entre as coordenadas, mostrada na Figura 3.4:

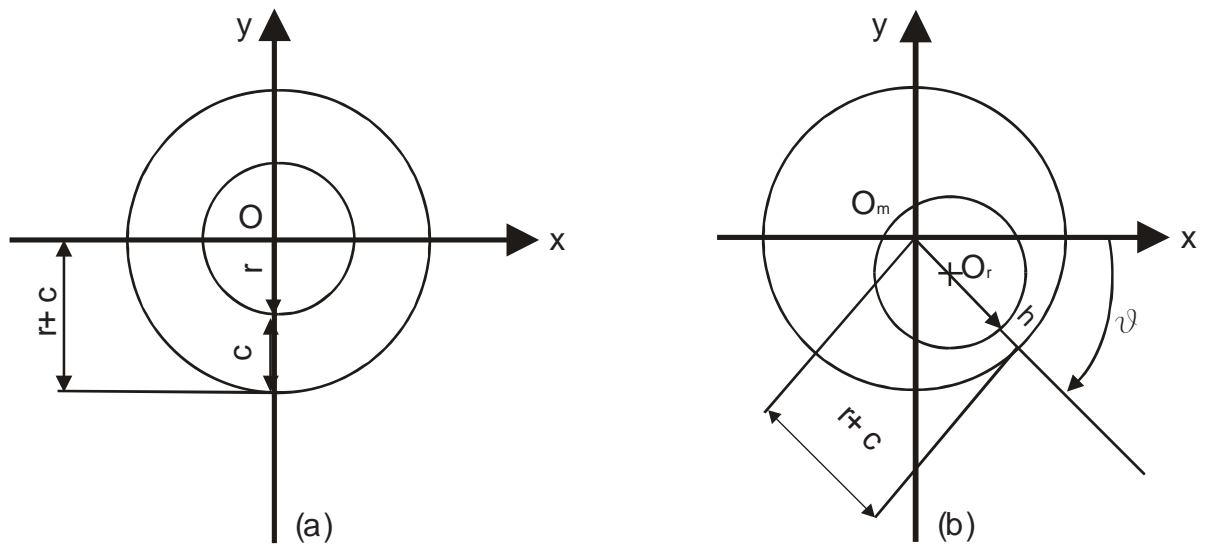


Figura 3.4: Espessura do filme de óleo (a) eixo centrado e (b) eixo descentrado

A espessura do filme de óleo, em sua forma adimensional, mostrada na Figura 3.4, pode ser deduzida como:

$$C=R-r$$

$$\bar{h} = R - r - \bar{x} \cos \vartheta - \bar{y} \sin \vartheta$$

$$\bar{h} = C - \bar{x} \cos \vartheta - \bar{y} \sin \vartheta$$

$$h = \frac{\bar{h}}{C} = 1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta \quad (3.7)$$

A derivação da função **h** com relação ao tempo adimensional é:

$$\frac{dh}{d\tau} = -\frac{dx}{d\tau} \cos \vartheta - \frac{dy}{d\tau} \sin \vartheta$$

$$\frac{dh}{d\tau} = -\dot{x} \cos \vartheta - \dot{y} \sin \vartheta \quad (3.8)$$

e com relação à coordenada ϑ , tem-se:

$$\frac{\partial h}{\partial \vartheta} = x \sin \vartheta - y \cos \vartheta \quad (3.9)$$

Substituindo-se as expressões anteriores (3.8) e (3.9) na equação (3.6), obtém-se a expressão:

$$K^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{h^3} [(x \sin \vartheta - y \cos \vartheta) + 2(-\dot{x} \cos \vartheta - \dot{y} \sin \vartheta)]$$

e lembrando-se as relações (3.3):

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = 4 \frac{L^2}{D^2} \left[\frac{(x \sin \vartheta - y \cos \vartheta) + 2(-\dot{x} \cos \vartheta - \dot{y} \sin \vartheta)}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} \right] \quad (3.10)$$

Para facilitar a integração faz-se:

$$F(x, y, \vartheta) = \frac{L^2}{D^2} \left[\frac{(x \sin \vartheta - y \cos \vartheta) + 2(-\dot{x} \cos \vartheta - \dot{y} \sin \vartheta)}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} \right]$$

Então:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \int_0^z 4F(x, y, \vartheta) dz = 4F(x, y, \vartheta)z + A \quad (3.11)$$

A distribuição de pressão poderá ser obtida da expressão abaixo:

$$p = \int_0^z (4Fz + A) dz = 4F \frac{z^2}{2} + Az + B = 2Fz^2 + Az + B \quad (3.12)$$

A condição de contorno impõe pressão nula nas extremidades do mancal. Assim, aplicando-se as condições para $-\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}$, tem-se:

$$p = \frac{F}{2}(4z^2 - 1) \quad (3.13)$$

Substituindo-se, então, a expressão equivalente de F na equação (3.13), tem-se:

$$p(\vartheta, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[\frac{(x - 2\dot{y}) \sin \vartheta - (y + 2\dot{x}) \cos \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} \right] (4z^2 - 1) \quad (3.14)$$

Esta equação representa o modelo matemático da distribuição de pressão em função das coordenadas polares, para um mancal hidrodinâmico tipo cilíndrico plano, com condições de fluxo e temperatura anteriormente definidas. No próximo capítulo será mostrado como a força hidrodinâmica não-linear é obtida através da equação (3.14).

Do ponto de vista da Dinâmica de Rotores, a melhor característica dos mancais hidrodinâmicos é seu alto amortecimento relativo aos outros tipos de mancais. A rigidez do filme de óleo tem uma forte influência sobre as velocidades críticas. Essas características dinâmicas também são altamente sensíveis às variações nas folgas radiais (C) dos mancais.

Nos mancais cilíndricos de geometria fixa, a rigidez do sistema possui termos cruzados e acoplados (K_{xy} e K_{yx}) que induzem instabilidades. Assim, há uma velocidade limiar de instabilidade de valor próximo ao dobro da primeira velocidade crítica, a partir da qual ocorre a instabilidade conhecida como “*Oil Whip*” [2]. Embora estes mancais apresentem um fator de amortecimento elevado, este não é suficiente para compensar as forças instabilizantes relacionadas ao “*Oil Whip*” em altas rotações do rotor, fenômeno que ocorre em diferentes condições de operação da máquina [37] [12].

3.3 Mancais Hidrodinâmicos Segmentados

3.3.1 Introdução

Como já apresentado no Capítulo 2, o mancal do tipo segmentado, ou Tilting-Pad em inglês, foi um dos primeiros tipos a ser desenvolvido e patentado, no início deste século por

Kingsbury e Michell. Seu emprego em grande escala somente aconteceu após a ocorrência de instabilidades nos mancais de geometria fixa, devido à novas e mais severas condições de cargas aplicadas ou velocidades de operação impostas pela era dos Turbo-rotorres [32].

Com a chegada dos rotores que operam em alta rotação, o projeto destes equipamentos passou a utilizar a dependência das características dinâmicas do sistema sobre a folga radial, para melhorar as condições de operação e assim chegou-se ao emprego dos mancais segmentados [37].

Assim, os mancais segmentados são projetados para melhorar as características de estabilidade pelo aumento da folga radial em operação, ou do setor carregado do mancal. Esse projeto reduz o problema da instabilidade pela diminuição dos termos de rigidez cruzados e acoplados existentes, por exemplo, nos mancais cilíndricos [2].

A Figura 3.5 mostra a geometria de um mancal hidrodinâmico tipo segmentado, em repouso. Neste tipo de mancal existem pás pivotadas internamente, que podem girar de certo ângulo ψ ao redor do ponto de pivotamento. Isso possibilita um ajuste da geometria do mancal à distribuição da pressão interna desenvolvida no filme de óleo existente entre o rotor e a superfície da pá. Não existe limite para o número de pás a ser utilizado no projeto de um mancal e as usinas hidroelétricas, por exemplo, podem ter mancais de 12, 16 ou um número maior de pás, de acordo com as necessidades de projeto [8].

A disposição e montagem destas pás vão depender de diversos fatores tais como a existência de cargas aplicada ao rotor ou não, e de como estas cargas são dispostas sobre a configuração da geometria do mancal. O ponto de pivotamento, que pode ser simétrico ou não, vai depender das características de operação da máquina rotativa.

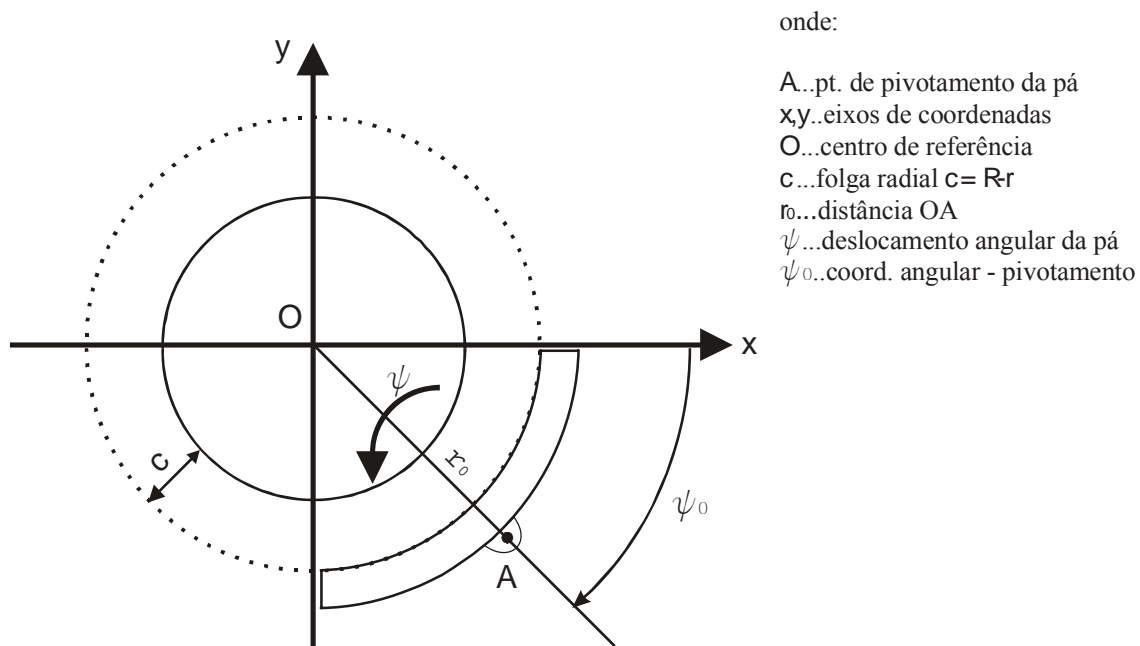


Figura 3.5: Esquema representativo de Mancal Segmentado e sua geometria.

No início do movimento o fluxo de óleo lubrificante criado pela diferença de pressões interna faz com que a pá incline-se de um ângulo ψ ao redor de seu ponto de pivotamento. O mesmo fenômeno ocorre com as outras pás do mancal, porém cada uma terá um ângulo de giro ψ próprio. Existem diferentes tipos de configurações para mancais segmentados. Alguns têm pás com pivotamento central onde o rotor pode ter rotação em dois sentidos, e em outros, o pivotamento está localizado fora da linha de centro da pá, permitindo somente um sentido de rotação do eixo da máquina.

A força hidrodinâmica que age sobre o rotor será dada pela soma das componentes cartesianas da força desenvolvida em cada pá isoladamente. Este tipo de mancal pode ser projetado com ou sem a presença de pré-carga incorporada à geometria.

3.3.2 Distribuição da Pressão no Filme de Óleo

A Figura 3.6 ilustra o caso de um mancal hidrodinâmico segmentado e o movimento relativo de uma de suas pás com relação a um sistema de coordenadas cartesiano fixado ao centro do mancal. A pressão desenvolvida na pá será dada em função da altura mínima do filme de óleo h entre o rotor e a pá, através da solução da equação diferencial de Reynolds (3.2), adimensionalizada:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \left(\omega \frac{\partial h}{\partial \vartheta} + 2 \frac{dh}{dt} \right)$$

Para este tipo de mancal, a hipótese de **mancal curto** é novamente usada, o que significa que $K=R/L$ é maior que 1, assim, têm-se as relações (3.3)

$$h = \frac{\bar{h}}{C}, \quad x = \frac{\bar{x}}{C}, \quad y = \frac{\bar{y}}{C}, \quad z = \frac{\bar{z}}{L}, \quad k = \frac{R}{L}, \quad \tau = \omega t, \quad \left(\frac{\cdot}{\cdot} \right) = \frac{d}{d\tau}$$

A equação simplificada será expressa pela equação (3.6):

$$K^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial h}{\partial \vartheta} + 2\dot{h}$$

Sua integração dependerá das relações trigonométricas nas pás do mancal. A Figura 3.6 também mostra o esquema de um mancal segmentado numa situação de movimento. Se o centro O_r do rotor se desloca de \bar{x} e \bar{y} do centro O_m do mancal, a espessura do filme de óleo é dada pela expressão:

$$\bar{h}' = C - \psi \bar{r}_0 \sin(\vartheta - \psi_0) \quad (3.15)$$

$$\bar{h} = \bar{h}' - \bar{x} \cos \vartheta - \bar{y} \sin \vartheta \quad (3.16)$$

$$\bar{h} = C - \bar{x} \cos \vartheta - \bar{y} \sin \vartheta - \psi \bar{r}_0 \sin(\vartheta - \psi_0) \quad (3.17)$$

$$h = \frac{\bar{h}}{C} = 1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta - \psi r_0 \sin(\vartheta - \psi_0) \quad (3.18)$$

Sendo

$$r_0 = \frac{\bar{r}_0}{C}$$

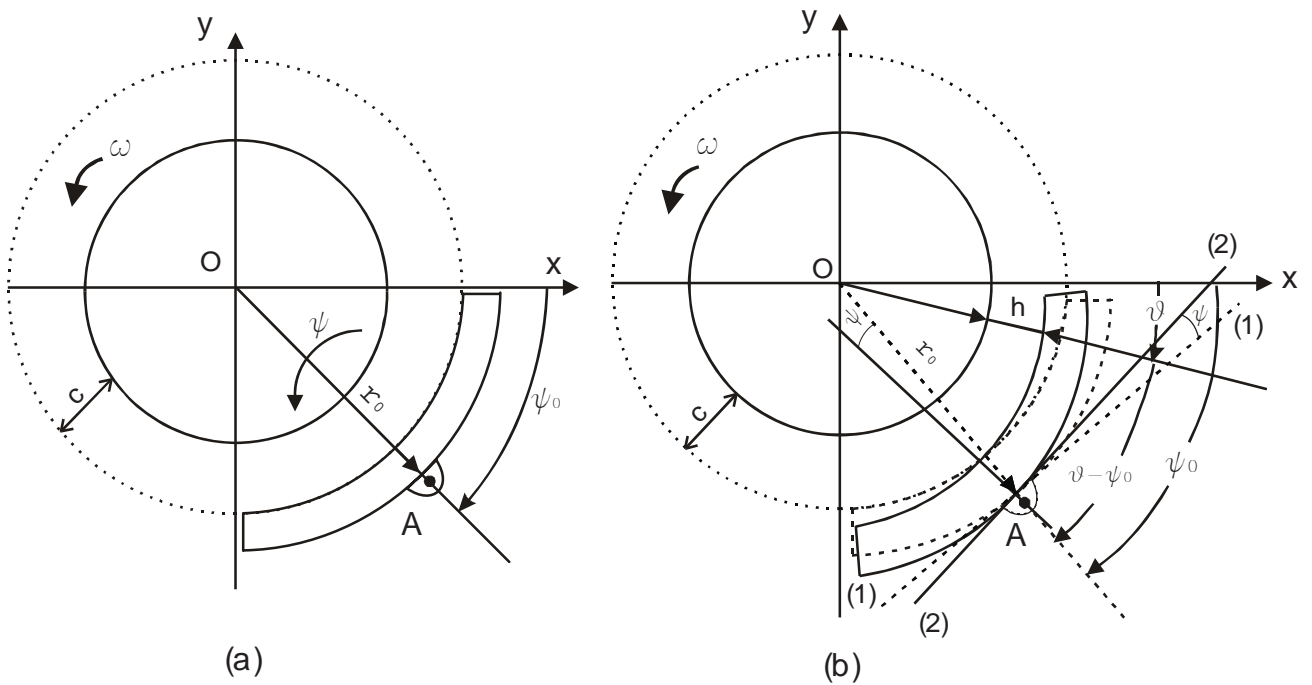


Figura 3.6: Esquema representativo de mancal segmentado com (a) rotor centrado sem movimento ($\omega = 0$) e (b) rotor descentrado e em movimento ($\omega \neq 0$)

A pressão será dada pela integração da equação de Reynolds em função da espessura do filme de óleo e suas derivadas, como no procedimento já apresentado para o caso dos mancais do tipo cilíndrico. A pressão será calculada para cada pá, cujos ângulos inicial ϑ_1 e final ϑ_2 , são os limites de integração.

Assim, a pressão para cada pá do mancal segmentado será obtida substituindo-se a função **h** (3.18) e suas derivadas na equação (3.6). A derivada da função espessura do filme de óleo **h** com relação ao tempo será dada por:

$$h = 1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta - \psi r_0 \sin(\vartheta - \psi_0)$$

$$\frac{dh}{d\tau} = -\frac{dx}{d\tau} \cos \vartheta - \frac{dy}{d\tau} \sin \vartheta - \frac{d\psi}{d\tau} r_0 \sin(\vartheta - \psi_0) \quad (3.19)$$

Chamando-se as expressões de $\frac{dx}{d\tau} = \dot{x}$, $\frac{dy}{d\tau} = \dot{y}$, e $\frac{d\psi}{d\tau} = \dot{\psi}$ e reescrevendo-as:

$$\frac{dh}{d\tau} = -\dot{x} \cos \vartheta - \dot{y} \sin \vartheta - \dot{\psi} r_0 \sin(\vartheta - \psi_0) \quad (3.20)$$

A derivada da função **h** com relação à coordenada ϑ é dada por:

$$\frac{\partial h}{\partial \vartheta} = x \sin \vartheta - y \cos \vartheta - \psi r_0 \cos(\vartheta - \psi_0) \quad (3.21)$$

Substituindo-se as expressões (3.18), (3.20) e (3.21) na equação 3.6 tem-se:

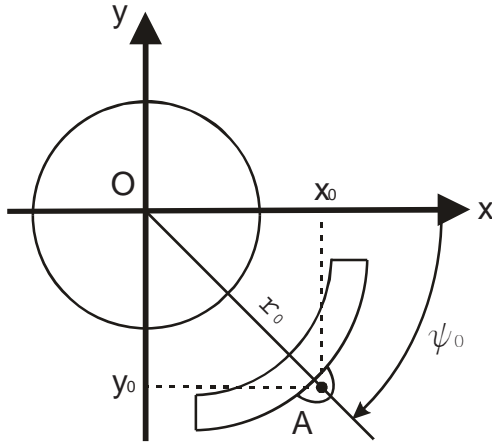
$$K^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = x \sin \vartheta - y \cos \vartheta - \psi \cos(\vartheta - \psi_0) + 2(-\dot{x} \cos \vartheta - \dot{y} \sin \vartheta - \dot{\psi} r_0 \sin(\vartheta - \psi_0)) \quad (3.22)$$

$$K^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{x \sin \vartheta - y \cos \vartheta - \psi r_0 \cos(\vartheta - \psi_0) - 2\dot{x} \cos \vartheta - 2\dot{y} \sin \vartheta - 2\dot{\psi} r_0 \sin(\vartheta - \psi_0)}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta - \psi r_0 \sin(\vartheta - \psi_0))^3} \quad (3.23)$$

Lembrando-se que $K=R/L$ e $R=D/2$, vem:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 4 \left(\frac{L^2}{D^2} \right) \frac{(x - 2\dot{y}) \sin \vartheta - (y - 2\dot{x}) \cos \vartheta - r_0 [\psi \cos(\vartheta - \psi_0) + 2\dot{\psi} \sin(\vartheta - \psi_0)]}{[1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta - \psi r_0 \sin(\vartheta - \psi_0)]^3} \quad (3.24)$$

Para simplificar o trabalho com esta expressão, toma-se como referência a Figura 3.7:



onde:

A...ponto de pivotamento

x,y...eixos de coordenadas

O...centro de referência

r₀...distância OA

ψ...deslocamento angular da pá

x₀...coord. do ponto A no eixo x

y₀...coord. do ponto A no eixo y

Figura 3.7: Relações trigonométricas no mancal segmentado

Sabendo-se que:

$$\begin{aligned} r_0 \cos \psi_0 &= x_0 \quad \text{e} \\ r_0 \sin \psi_0 &= y_0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\cos(\vartheta - \psi_0) = \cos \vartheta \cos \psi_0 + \sin \vartheta \sin \psi_0$$

$$\sin(\vartheta - \psi_0) = \sin \vartheta \cos \psi_0 - \sin \psi_0 \cos \vartheta$$

Tem-se:

$$r_0 \psi \cos(\vartheta - \psi_0) = r_0 \psi \cos \vartheta \cos \psi_0 - r_0 \psi \sin \vartheta \sin \psi_0 = x_0 \psi \cos \vartheta - y_0 \psi \sin \vartheta$$

$$r_0 2\dot{\psi} \sin(\vartheta - \psi_0) = 2\dot{\psi} r_0 [\sin \vartheta \cos \psi_0 - \sin \psi_0 \cos \vartheta] = 2\dot{\psi} x_0 \sin \vartheta - 2\dot{\psi} y_0 \cos \vartheta$$

(3.26)

Substituindo-se, então, as expressões (3.26) na equação (3.24):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial^2 z} = 4 \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[\frac{(x - 2\dot{y}) \sin \vartheta - (y - 2\dot{x}) \cos \vartheta - \psi x_0 \cos \vartheta - \psi y_0 \sin \vartheta + 2\dot{\psi} x_0 \sin \vartheta - 2\dot{\psi} y_0 \cos \vartheta}{[1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta - \psi r_0 \sin(\vartheta - \psi_0)]^3} \right]$$

(3.27)

Desenvolve-se, agora, o denominador:

$$[1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta - \psi r_0 \sin(\vartheta - \psi_0)]^3 = [1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta - \psi r_0 (\sin \vartheta \cos \psi_0 - \sin \psi_0 \cos \vartheta)]^3$$

$$[1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta - \psi r_0 \sin(\vartheta - \psi_0)]^3 = [1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta - \psi r_0 \sin \vartheta \cos \psi_0 + \psi r_0 \sin \psi_0 \cos \vartheta]^3$$

$$[1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta - \psi r_0 \sin \vartheta \cos \psi_0 + \psi r_0 \sin \psi_0 \cos \vartheta]^3 = [1 - (y + \psi r_0 \cos \psi_0) \sin \vartheta - (x - \psi r_0 \sin \psi_0) \cos \vartheta]^3$$

Substituindo-se as relações **(3.25)** na expressão acima:

$$[1 - (y + \psi r_0 \cos \psi_0) \sin \vartheta - (x - \psi r_0 \sin \psi_0) \cos \vartheta]^3 = [1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]^3 \quad (3.28)$$

A expressão **(3.27)**, torna-se, então:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial^2 z} = 4 \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[\frac{[(x - \psi y_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi} x_0)] \sin \vartheta - [(y + \psi x_0) + 2(\dot{x} - \dot{\psi} y_0) \cos \vartheta]}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]^3} \right] \quad (3.29)$$

A expressão que fornece a pressão hidrodinâmica exercida pelo filme de óleo em mancais segmentados é obtida pelo mesmo procedimento empregado quando do estudo dos mancais cilíndricos, descrito no item anterior, ou seja:

$$\left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[\frac{[(x - \psi y_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi} x_0)] \sin \vartheta - [(y + \psi x_0) + 2(\dot{x} - \dot{\psi} y_0) \cos \vartheta]}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]^3} \right] = F', \quad (3.30)$$

Podemos integrar a equação **(3.29)** como:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \int_0^z 4F' dz \Rightarrow 4F' z + A \quad (3.31)$$

$$p(\vartheta, z) = 4F' \frac{z^2}{2} + Az + B = 2F' z^2 + Az + B$$

A condição de contorno, como no caso dos mancais cilíndricos, impõe pressão nula nas extremidades do mancal, onde $-\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}$. Assim, a expressão que fornece a pressão hidrodinâmica exercida pelo filme de óleo é dada por:

$$p(\vartheta, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[\frac{[(x - \psi y_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi} x_0)] \sin \vartheta - [(y + \psi x_0) + 2(\dot{x} - \dot{\psi} y_0)] \cos \vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]^3} \right] (4z^2 - 1) \quad (3.32)$$

No próximo capítulo será então apresentado o desenvolvimento do modelo matemático para obtenção da força hidrodinâmica, que constitui o objeto principal deste estudo.

4 MODELOS MATEMÁTICOS

4.1 Introdução

Como exposto no capítulo 3, entre a superfície do rotor e a superfície interna do mancal hidrodinâmico, no ponto de conexão entre o rotor e a estrutura, há um atrito viscoso causado pela tensão de cisalhamento das partículas do fluido lubrificante ali existente.

As pressões internas que surgem no filme do lubrificante do mancal estão relacionadas às propriedades físicas do fluido, e também à posição do rotor relativa ao mancal por meio da função espessura do filme de óleo h .

Estas pressões, ou sua distribuição, são obtidas pela solução da Equação de Reynolds (3.2), para certas suposições. Obtida a distribuição de pressões, a força hidrodinâmica pode ser calculada pela integração da distribuição de pressão ao longo da área da superfície do mancal.

A seguir, serão deduzidos os procedimentos usados em [10][15] para, partindo-se da equação diferencial (3.2), obter um modelo matemático para a força hidrodinâmica não-linear que age sobre o rotor durante seu movimento de rotação, devidas ao atrito viscoso do fluido lubrificante. Os mancais tipo cilíndrico plano e segmentado são os objetos deste estudo.

4.2 Modelo Matemático para Mancal Cilíndrico

A força não-linear exercida pelo filme de óleo sobre o rotor será inicialmente modelada para mancais hidrodinâmicos do tipo cilíndrico, cujas características principais foram apresentadas no capítulo anterior.

O método apresentado foi desenvolvido por **CAPONE** [5][7] em 1991 baseado nos trabalhos de **KIRK & GUNTER** [23][24] em 1976, onde não é efetuada a linearização das equações das forças de sustentação do mancal ao redor da posição de equilíbrio estático do rotor pelo método das pequenas perturbações, mas sim, a inclusão dos efeitos não-lineares na forma de força externa do lado direito da equação diferencial de movimento do sistema.

CAPONE [7] aplicou seu método para obter graficamente as órbitas descritas pelo centro do rotor em relação ao centro do mancal em seu movimento de precessão em um sistema composto por um rotor horizontal rígido e simétrico, operando sobre mancais hidrodinâmicos cilíndricos planos, com regime de lubrificação isotérmica laminar e considerando, ainda, mancal curto, rigidamente fixado à estrutura de suporte da máquina.

A aplicação do procedimento proposto por **CAPONE** [7] foi apresentada em [15] para um sistema composto por rotor vertical, flexível e simétrico, com mancal cilíndrico plano e curto. Foram realizadas simulações numéricas, integrando as equações de movimento pelo método de Newmark para mancais com e sem carga externa.

Em 1995, **CAVALCA *et al.*** [10] verificaram experimentalmente a simulação numérica realizada em [15] para o mancal cilíndrico e desenvolveram uma aplicação para mancais segmentados apresentando o modelo para a obtenção das forças não-lineares agentes sobre o rotor, que considera todas as complexidades geométricas envolvidas neste tipo de mancal.

A seguir, apresenta-se a verificação do procedimento matemático empregado para a obtenção da força hidrodinâmica gerada pelo filme de óleo do mancal tipo cilíndrico.

4.2.1 Força Hidrodinâmica

A força hidrodinâmica não-linear será obtida pela integração da equação que fornece a pressão hidrodinâmica existente dentro do mancal, ao longo da área de contato. A força será obtida pela soma vetorial das componentes nas direções **x** e **y**, como mostrado na Figura 4.1 abaixo.

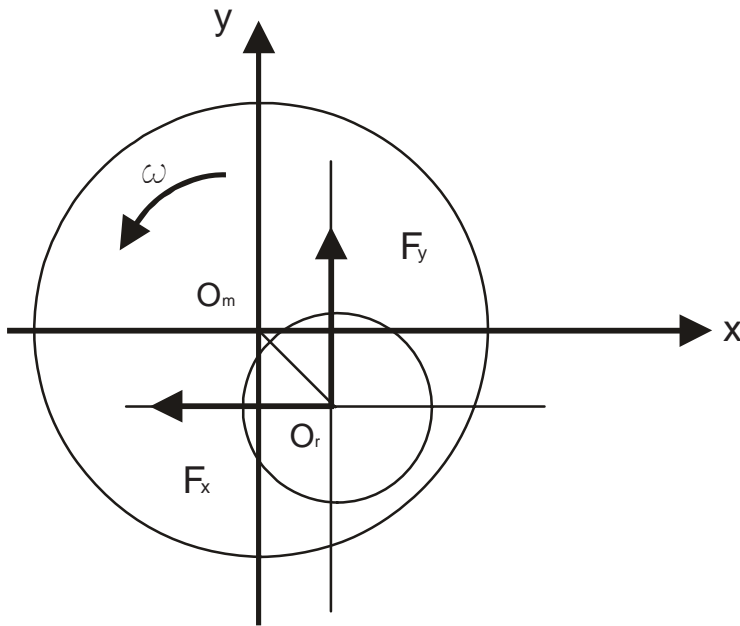


Figura 4.1: Componentes F_x e F_y da força hidrodinâmica

As componentes F_x e F_y da força hidrodinâmica dependem da espessura h do filme de óleo e de sua variação ao longo da coordenada angular ϑ . Tais forças são dadas pela integração da expressão (3.14), para pressão hidrodinâmica.

$$p(\vartheta, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[\frac{(x - 2\dot{y}) \sin \vartheta - (y + 2\dot{x}) \cos \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} \right] (4z^2 - 1)$$

ou seja:

$$\bar{F} = - \int_{\bar{A}} \bar{p} \cdot d\bar{A} \quad (4.1)$$

Sendo que a área \bar{A} , ilustrada na Figura 4.2 é dada por:

$$A = R d\vartheta \cdot L dz \quad (4.2)$$

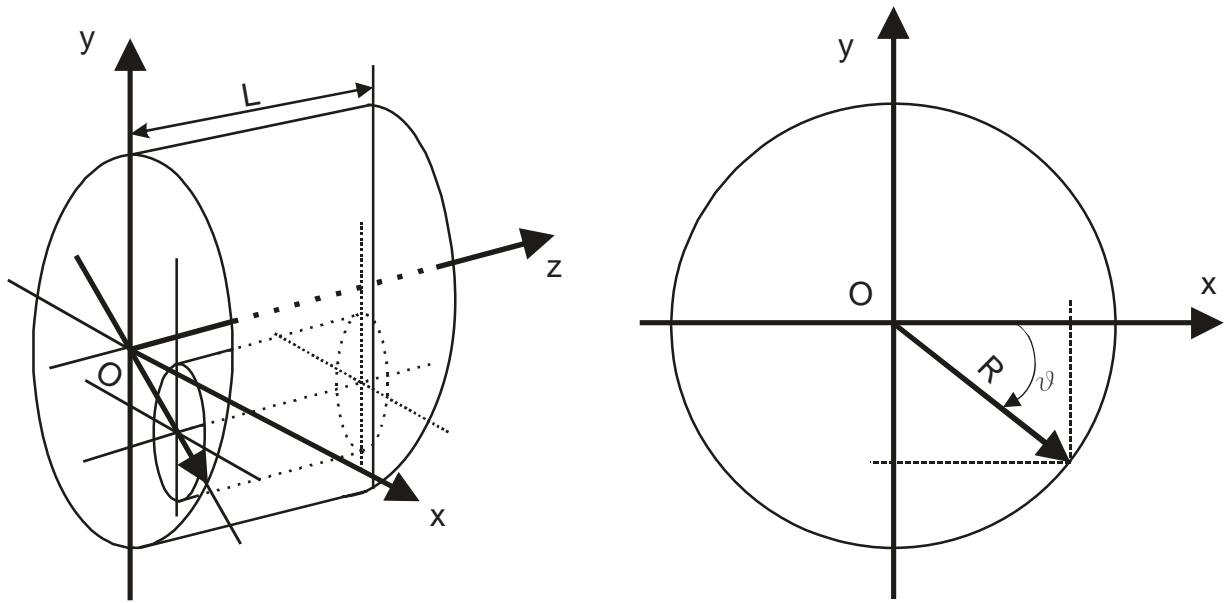


Figura 4.2: Relações Geométricas no Mancal Cilíndrico Plano (a) vista especial (b) vista no plano x,y

A pressão \bar{p} pode ser substituída na expressão (4.1) como sendo o produto dos termos p_0 e p , das expressões (3.4) e (3.14), lembrando-se que:

$$\cos\vartheta = \frac{\bar{x}}{R} \quad , \quad \bar{x} = R \cos\vartheta$$

$$\sin\vartheta = \frac{\bar{y}}{R} \quad , \quad \bar{y} = R \sin\vartheta$$

tem-se:

$$\bar{p} = p_0 \cdot p$$

e

$$p_0 = 6\mu\omega \frac{R^2}{C^2}$$

$$\bar{F} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} p_0 p R d\vartheta L dz \quad (4.3)$$

onde:

α = ângulo de trabalho [5][7]

$$\alpha = \arctg\left(\frac{y + 2\dot{x}}{x - 2\dot{y}}\right) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}\left(\frac{y + 2\dot{x}}{x - 2\dot{y}}\right) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(y + 2\dot{x})$$

$$\bar{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} (p_0 L) p(\vartheta, z) R \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{Bmatrix} d\vartheta dz \quad (4.4)$$

Substituindo-se $p(\vartheta, z)$ e p_0 :

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = -3\mu\omega \frac{R^2}{C^2} (RL) \left(\frac{L}{D}\right)^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \left[\frac{(x - 2\dot{y}) \sin \vartheta - (y + 2\dot{x}) \cos \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} \right] \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{Bmatrix} (4z^2 - 1) d\vartheta dz \quad (4.5)$$

Introduzindo-se o *número de Sommerfeld* como:

$$S_o = \frac{\mu\omega}{P_m} \left(\frac{R^2}{C^2} \right) \quad \text{onde } P_m = \frac{W}{RL}$$

$$S_o = \frac{\mu\omega}{W} \left(\frac{R^2}{C^2} \right) (RL) \quad (4.6)$$

O número de Sommerfeld modificado, para mancais curtos, é definido por:

$$\sigma = \text{So}\left(\frac{L^2}{D^2}\right)$$

ou

$$\sigma = \frac{\mu\omega}{W}\left(\frac{R^2}{C^2}\right)\left(\frac{L^2}{D^2}\right)(RL) \quad (4.7)$$

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = 3\sigma W \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \left[\frac{(x-2\dot{y})\sin\vartheta - (y+2\dot{x})\cos\vartheta}{(1-x\cos\vartheta - y\sin\vartheta)^3} \right] \begin{Bmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{Bmatrix} (4z^2 - 1) d\vartheta dz \quad (4.8)$$

$$f = \frac{F}{\sigma W} = -3 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \left[\frac{(x-2\dot{y})\sin\vartheta - (y+2\dot{x})\cos\vartheta}{(1-x\cos\vartheta - y\sin\vartheta)^3} \right] \begin{Bmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{Bmatrix} (4z^2 - 1) d\vartheta dz \quad (4.9)$$

Integrando-se, inicialmente ao longo da coordenada z, considera-se:

$$\text{Integral}(dz) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (4z^2 - 1) dz \Rightarrow \left[4\frac{z^3}{3} - z \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{4}{3}\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{2} \right] - \left[\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{Integral}(dz) = -\frac{2}{3}$$

Assim, a equação (4.9) torna-se:

$$f = \frac{F}{\sigma W} = -3 \left(-\frac{2}{3} \right) \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \left[\frac{(x-2\dot{y})\sin\vartheta - (y+2\dot{x})\cos\vartheta}{(1-x\cos\vartheta - y\sin\vartheta)^3} \right] \begin{Bmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{Bmatrix} d\vartheta$$

$$f = \frac{F}{\sigma W} = 2 \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \left[\frac{(x - 2\dot{y}) \sin \vartheta - (y + 2\dot{x}) \cos \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} \right] \left\{ \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right\} d\vartheta \quad (4.10)$$

que pode ser reescrita como:

$$f = 2 \cdot \left[\begin{aligned} & (x - 2\dot{y}) \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} d\vartheta - (y + 2\dot{x}) \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\cos^2 \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} d\vartheta \\ & (x + 2\dot{y}) \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} d\vartheta - (y - 2\dot{x}) \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} d\vartheta \end{aligned} \right] \quad (4.11)$$

As expressões acima fornecem as componentes das forças não-lineares exercidas nas direções x e y , do sistema de referência fixado ao centro do mancal, pelo filme de óleo sobre o rotor. Para obtê-las é necessário resolver as integrais abaixo:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\cos^2 \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} d\vartheta; \quad I_2 = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} d\vartheta \quad e \\ I_3 &= \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} d\vartheta \end{aligned} \quad (4.12)$$

dependentes dos parâmetros x, y e α

Tais integrais apresentam soluções analíticas extremamente complexas. Para se evitar a integração da equação (4.11), propõe-se uma solução matemática, através da solução do tipo indireta pela definição da integral:

$$G(x, y, \alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)} \quad (4.13)$$

Resolvendo-se a integral (4.13):

$$G(x,y,\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{(1-x\cos\vartheta - y\sin\vartheta)} = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{(1-(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta))}$$

Para trabalhar esta integral, faz-se uso da operação:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{[1-(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)]} \cdot \frac{[1+(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)]}{[1+(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)]} = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{[1+(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)]}{[1-(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)^2]} d\vartheta$$

$$G(x,y,\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{[1-(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)^2]} + \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)}{[1-(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)^2]} d\vartheta \quad (4.14)$$

Chamando-se a primeira parcela das integrais de **(4.14)** de **I₁'** e a segunda de **I₂'**:

$$G(x,y,\alpha) = \mathbf{I_1'} + \mathbf{I_2'} \quad (4.15)$$

Trabalhando-se o denominador das integrais:

$$[1-(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)^2] = 1-x^2-y^2+(y\cos\vartheta - x\sin\vartheta)^2 \quad (4.16)$$

$$[1-(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)^2] = (1-x^2-y^2) \left[1 + \frac{(y\cos\vartheta - x\sin\vartheta)^2}{(1-x^2-y^2)} \right]$$

$$[1-(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)^2] = (1-x^2-y^2) \left[1 + \left(\frac{(y\cos\vartheta - x\sin\vartheta)}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}} \right)^2 \right] \quad (4.17)$$

Substituindo-se esta expressão equivalente ao denominador, na equação **I₂'**:

$$I_2' = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)}{(1-x^2-y^2) \left[1 + \left(\frac{(y \cos \vartheta - x \sin \vartheta)}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}} \right)^2 \right]} d\vartheta \quad (4.18)$$

Chamando-se:

$$k = \frac{y \cos \vartheta - x \sin \vartheta}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Tem-se:

$$dk = -\frac{-y \sin \vartheta - x \cos \vartheta}{\sqrt{1-x^2-y^2}} d\vartheta$$

Rearranjando-se a expressão (4.18):

$$I_2' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{-y \sin \vartheta - x \cos \vartheta}{\sqrt{1-x^2-y^2} \left[1 + \left(\frac{(y \cos \vartheta - x \sin \vartheta)}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}} \right)^2 \right]} d\vartheta \quad (4.19)$$

Ou seja, a integral I_2' passa a ser do tipo:

$$I_2' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{dk}{(1+k^2)} \quad (4.20)$$

A solução da integral (4.20) é do tipo:

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} \quad (4.21)$$

Portanto, tem-se:

$$I_2' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \operatorname{arctg} k \Big|_{\alpha}^{\alpha+\pi}$$

$$I_2' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{y \cos \vartheta - x \operatorname{sen} \vartheta}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \Big|_{\alpha}^{\alpha+\pi} \quad (4.22)$$

substituindo-se os limites de integração:

$$I_2' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{y \cos(\alpha + \pi) - x \operatorname{sen}(\alpha + \pi)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{y \cos(\alpha) - x \operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \right] \quad (4.23)$$

como:

$$\cos(\alpha + \pi) = \cos \alpha \cos \pi - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \pi = -\cos \alpha = -\cos(-\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \pi) = \operatorname{sen} \alpha \cos \pi + \operatorname{sen} \pi \cos \alpha = -\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(-\alpha)$$

Tem-se, na expressão (4.23):

$$I_2' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{-y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \right] \quad (4.24)$$

$$\operatorname{tg}(\delta) = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos \delta} \quad -\operatorname{tg}(\delta) = -\frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos \delta} \quad \operatorname{tg}^{-1}(k) = \delta \quad -\operatorname{tg}(\delta) = \frac{\operatorname{sen}(-\delta)}{\cos(-\delta)} = \operatorname{tg}(-\delta) \quad (4.25)$$

Substituindo-se a relação (4.25) na expressão (4.24):

$$\begin{aligned}
I_2' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \left[-\operatorname{arctg} \left(\frac{y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \right] \\
I_2' &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Resolvendo-se, agora, a integral I_1' :

$$I_1' = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{\left[1 - (x \cos \vartheta + y \operatorname{sen} \vartheta)^2 \right]} \tag{4.27}$$

Têm-se da figura 4.3,

$$\operatorname{sen} \vartheta = \frac{y}{d} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos \vartheta = \frac{x}{d} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

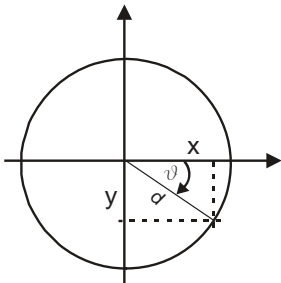


Figura 4.3: Relações Trigonômicas no Mancal Cilíndrico.

Assim:

$$\frac{1}{\left[1 - (x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)^2\right]} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{x \cdot x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right]} \quad (4.28)$$

Trabalhando-se o denominador da expressão acima:

$$1 - \left(\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 = 1 - \left[\frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2}\right] = 1 - (x^2 + y^2) = 1 - x^2 - y^2 \quad (4.29)$$

$$I_1' = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{(1 - x^2 - y^2)} = \frac{\vartheta}{(1 - x^2 - y^2)} \Big|_{\alpha}^{\alpha+\pi} = \frac{\alpha + \pi}{(1 - x^2 - y^2)} - \frac{\alpha}{(1 - x^2 - y^2)} = \frac{\pi}{(1 - x^2 - y^2)}$$

$$\text{e como } (1 - x^2 - y^2) \cong \sqrt{1 - x^2 - y^2} \cong 1 \Rightarrow I_1' = \frac{\pi}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad (4.30)$$

A função $G(x, y, \alpha)$ é, então, escrita como:

$$G(x, y, \alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right)$$

$$G(x, y, \alpha) = \frac{\pi}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right) \quad (4.31)$$

Como **CAPONE** [5][7] apresentou, a expressão (4.31) é equivalente à (4.13), sendo que a última expressão permite, através das regras de derivação para uma função integral, apresentar as relações que envolvem a solução das integrais I_1 , I_2 e I_3 mostradas nas expressões (4.12).

Derivando-se os termos da integral I_1 (4.13), em função de \mathbf{x} , tem-se:

$$\frac{\partial G(x, y, \alpha)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)} \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)} \right) = \frac{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta) \cdot 0 - d\vartheta \cdot (-\cos \vartheta)}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^2} = \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^2} \quad (4.33)$$

Ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)} = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^2} \quad (4.34)$$

Derivando-se novamente a integral (4.34), com relação à variável x , tem-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^2} = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^2 \cdot 0 - (\cos \vartheta d\vartheta) \cdot 2(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta) \cdot (-\cos \vartheta)}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^4}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)} = 2 \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\cos^2 \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} d\vartheta \quad (4.35)$$

$$I_1 = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\cos^2 \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} d\vartheta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y, \alpha) \quad (4.36)$$

Para se obter a solução da integral I_2 , um caminho análogo é feito, porém derivando-se duas vezes a função $G(x, y, \alpha)$ com relação à variável y :

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)} = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta).0 - d\vartheta. - \sin \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\sin \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^2} d\vartheta \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^2 .0 - 2. - \sin \vartheta d\vartheta . (1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta). - \sin \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^4}$$

$$I_2 = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\sin^2 \vartheta d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G(x, y, \alpha)}{\partial y^2} \quad (4.38)$$

A integral I_3 será obtida derivando-se a função $G(x, y, \alpha)$ com relação à variável x e depois com relação à y :

$$\frac{\partial G(x, y, \alpha)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)} = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^2} \quad (4.39)$$

Derivando-se agora a expressão (4.39) com relação à variável y , têm-se:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^2} = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^2 .0 - \cos \vartheta d\vartheta . 2. (1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta). - \sin \vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^4} \quad (4.40)$$

$$I_3 = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{d\vartheta}{(1 - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) G(x, y, \alpha) \quad (4.41)$$

Assim, a força hidrodinâmica pode ser dada pela substituição das integrais I_1 , I_2 e I_3 na expressão (4.11).

Portanto:

$$f = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \frac{F}{\sigma W} = 2 \cdot \begin{Bmatrix} (x - 2\dot{y}) \frac{\partial^2 G(x, y, \alpha)}{\partial x \partial y} - (y + 2\dot{x}) \frac{\partial^2 G(x, y, \alpha)}{\partial x^2} \\ (x + 2\dot{y}) \frac{\partial^2 G(x, y, \alpha)}{\partial y^2} - (y + 2\dot{x}) \frac{\partial^2 G(x, y, \alpha)}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

Este método para a obtenção das forças hidrodinâmicas não-lineares exercidas pelo filme de óleo no mancal, apresentado por [5] [7], apresentava muitas complexidades na obtenção das derivadas parciais de segunda ordem da função $G(x, y, \alpha)$, o que tornava onerosa a obtenção das órbitas descritas pelo centro do rotor com relação ao centro do mancal.

Em 1991, porém, a introdução de novas expressões que relacionam as componentes das forças não-lineares eliminou a necessidade de dupla derivação parcial da função $G(x, y, \alpha)$ então estabelecida.

Para verificar os caminhos percorridos para, partindo-se da expressão (4.42), obter-se a força hidrodinâmica no mancal, procede-se com as derivações parciais de primeira e segunda ordem da função $G(x, y, \alpha)$.

1º Passo: Derivação da função $G(x, y, \alpha)$ com relação à variável x :

Derivando-se o primeiro termo do lado direito da equação (4.31), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2} \cdot 0 - \pi(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(1-x^2-y^2)} = \frac{\pi x}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \arctg \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \right) &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\arctg \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \right) + \\ &+ \arctg \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

A derivada da função arco tangente, é:

$$\frac{d}{dx}(\arctg u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

Para $u = \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, tem-se:

$$\frac{du}{dx} = \frac{-\sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{x(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Assim, a derivada da função arco tangente de u , será:

$$\frac{d}{dx} \left(\arctg \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}} \right)^2} \left[\frac{-\sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{x(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (4.45)$$

Substituindo-se a derivada (4.45) na expressão de derivação parcial da função $G(x,y,\alpha)$ (4.44):

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} = & \frac{\pi x}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{1}{1 + \left(\frac{(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}} \right)^2} \left[\frac{-\sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{x(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + \\ & + \arctg \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \cdot \frac{2x}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Para continuar com a derivação, o lado direito da expressão acima terá seus termos chamados de T_1, T_2 e T_3 , respectivamente. Assim, trabalhando-se o termo T_2 :

$$T_2 = \frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}} \right)^2} \cdot \left[\frac{-\sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{x(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$T_2 = \left[\frac{-2 \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)} + \frac{2x(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} \right] \left\{ \frac{(1-x^2-y^2)}{(1-x^2-y^2) + (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2} \right\} \quad (4.47)$$

A expressão do denominador de T_2 , será desenvolvida como segue:

$$(1-x^2-y^2) + (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = 1 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 \quad (4.48)$$

Das relações trigonométricas obtidas da Figura 4.3 obtém-se:

$$T_2 = \left[\frac{-2 \sin \alpha (1-x^2-y^2)}{(1-x^2-y^2) [1 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2]} + \frac{2x(y \cos \alpha - x \sin \alpha) (1-x^2-y^2)}{(1-x^2-y^2)^2 [1 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2]} \right]$$

$$T_2 = \frac{2x(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{[1 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2]} - \frac{2 \sin \alpha}{[1 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2]} \quad (4.49)$$

Assim, somando-se os termos T_1 , T_2 e T_3 , tem-se a derivada da função $G(x, y, \alpha)$, com relação à variável x :

$$\frac{\partial G(x, y, \alpha)}{\partial x} = \frac{x}{(1-x^2-y^2)} \left[\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot \arctg \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \right] +$$

$$+ \frac{2x(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{[1 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2]^2} - \frac{2 \sin \alpha}{[1 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2]}$$

que pode ser re-escrita como:

$$\frac{\partial G(x,y,\alpha)}{\partial x} = \frac{x \cdot G(x,y,\alpha)}{(1-x^2-y^2)} + \frac{2x(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} - \frac{2 \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)} \quad (4.50)$$

2º Passo: Derivação da função $G(x,y,\alpha)$ com relação à variável y :

De modo análogo, a derivada parcial com relação à variável y da função $G(x,y,\alpha)$ é obtida derivando-se o primeiro termo do lado direito da equação (4.31) em relação à y :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2} \cdot 0 - \pi \frac{1}{2} (1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y}{(1-x^2-y^2)^2} = \frac{\pi y}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.51)$$

Para o segundo termo, a derivação obedece às regras para produto de funções:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \arctg \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \right) &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\arctg \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \cdot \arctg \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Para $\mathbf{u}^* = \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, tem-se:

$$\frac{d\mathbf{u}^*}{dy} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{y(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Assim, a derivada da função arco tangente de \mathbf{u}^* , será:

$$\frac{d}{dy} \left(\arctg \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}} \right)^2} \left[\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{y(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (4.53)$$

Substituindo-se a derivada (4.53) na expressão de derivação parcial da função $G(x,y,\alpha)$ (4.52):

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y} = & \frac{\pi y}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}} \right)^2} \left[\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{y(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + \\ & + \arctg \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \cdot \frac{2y}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Para continuar com a derivação, o lado direito da expressão acima terá seus termos chamados de T_1' , T_2' e T_3' , respectivamente. Assim, trabalhando-se o termo T_2' :

$$\begin{aligned} T_2' = & \frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}} \right)^2} \cdot \left[\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{y(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ T_2' = & \left[\frac{2 \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)} - \frac{2y(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} \right] \left\{ \frac{(1-x^2-y^2)}{(1-x^2-y^2) + (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.55)$$

A expressão do denominador de T_2' é análoga à de T_2 :

$$(1-x^2-y^2) + (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = 1 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 = 1-x^2-y^2 \quad (4.56)$$

que substituindo-se fornecerá:

$$T_2 = \frac{2 \cos \alpha}{(1 - x^2 - y^2)} - \frac{2y(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)^2} \quad (4.57)$$

Assim, somando-se os termos T_1' , T_2' e T_3' obtém-se a derivada da função $G(x, y, \alpha)$, com relação à variável y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y, \alpha)}{\partial y} = & \frac{y}{(1 - x^2 - y^2)} \left[\frac{\pi}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \cdot \arctg \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right) \right] + \\ & + \frac{2y(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{[1 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2]^2} + \frac{2 \cos \alpha}{[1 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2]} \end{aligned} \quad (4.58)$$

que pode ser re-escrita como:

$$\frac{\partial G(x, y, \alpha)}{\partial y} = \frac{y \cdot G(x, y, \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)} + \frac{2y(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)^2} + \frac{2 \cos \alpha}{(1 - x^2 - y^2)} \quad (4.59)$$

A partir das expressões (4.50) e (4.59), realizam-se novas operações de derivação parcial com relação às variáveis x e y .

3º Passo: Derivação de segunda ordem da função $G(x, y, \alpha)$ com relação à variável x dada como:

$$\frac{\partial^2 G(x, y, \alpha)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x \cdot G(x, y, \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)} + \frac{2x(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)^2} - \frac{2 \sin \alpha}{(1 - x^2 - y^2)} \right] \quad (4.60)$$

Assim, a derivada do primeiro termo do lado direito da expressão (4.60) é:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x G(x, y, \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(1 - x^2 - y^2)} \right) \cdot G(x, y, \alpha) + \frac{\partial G(x, y, \alpha)}{\partial x} \frac{x}{(1 - x^2 - y^2)} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \left(\frac{G(x,y,\alpha)}{(1-x^2-y^2)} \right) + \frac{2x^2 G(x,y,\alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{x^2 G(x,y,\alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} - \frac{2x \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{G(x,y,\alpha)}{(1-x^2-y^2)} + \frac{3x^2 G(x,y,\alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} - \frac{2x \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)^2}\end{aligned}\quad (4.62)$$

A derivada do segundo termo do lado direito da expressão (4.60), é:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2x(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{(1-x^2-y^2)^2} \right) (y \cos \alpha - x \sin \alpha) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \left(\frac{2x}{(1-x^2-y^2)^2} \right)\end{aligned}\quad (4.63)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \left(\frac{2}{(1-x^2-y^2)^2} \right) (y \cos \alpha - x \sin \alpha) + \left(\frac{2x}{(1-x^2-y^2)^2} \right) (-\sin \alpha) \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{2(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} - \frac{2x \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)^2}\end{aligned}\quad (4.64)$$

A derivada do terceiro termo do lado direito da expressão (4.60), é:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2 \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)} \right) = \frac{4x \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)^2}\quad (4.65)$$

A derivada parcial de segunda ordem da função, com relação à variável x , da função $G(x,y,\alpha)$ será a somatória de (4.62) (4.64) e (4.65):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G(x, y, \alpha)}{\partial x^2} &= \frac{G(x, y, \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)} + \frac{3x^2 G(x, y, \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)^2} - \frac{2x \operatorname{sen} \alpha}{(1 - x^2 - y^2)^2} + \frac{2(y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)} + \\
&\quad - \frac{2x \operatorname{sen} \alpha}{(1 - x^2 - y^2)^2} - \frac{4x \operatorname{sen} \alpha}{(1 - x^2 - y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 G(x, y, \alpha)}{\partial x^2} &= \frac{3x^2 G(x, y, \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)^2} + \frac{G(x, y, \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)} - \frac{8x \operatorname{sen} \alpha}{(1 - x^2 - y^2)^2} + \frac{2(y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)} \quad (4.66)
\end{aligned}$$

4º Passo: A derivada parcial, com relação à variável **y**, da derivada parcial da função $G(x, y, \alpha)$ com relação a **x** pode ser obtida de:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{xG}{(1 - x^2 - y^2)} + \frac{2x(y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)^2} - \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{(1 - x^2 - y^2)} \right] \quad (4.67)$$

A derivada do primeiro termo do lado direito da expressão (4.67), será:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{(1 - x^2 - y^2)} \right) \cdot G(x, y, \alpha) + \frac{\partial G(x, y, \alpha)}{\partial y} \cdot \frac{x}{(1 - x^2 - y^2)} &= \frac{2xyG}{(1 - x^2 - y^2)^2} + \frac{xyG}{(1 - x^2 - y^2)^2} + \\
&\quad + \frac{2x \cos \alpha}{(1 - x^2 - y^2)^2}
\end{aligned} \quad (4.68)$$

A derivada do segundo termo do lado direito da expressão (4.67) será:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{(1 - x^2 - y^2)^2} \right) (y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha) + \frac{2x}{(1 - x^2 - y^2)^2} \cdot \frac{\partial (y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha)}{\partial y} = \frac{2x \cos \alpha}{(1 - x^2 - y^2)^2} \quad (4.69)$$

A derivada do último termo do lado direito da expressão (4.67), será:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{(1-x^2-y^2)} \right) = - \frac{4y \operatorname{sen} \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} \quad (4.70)$$

A derivada parcial de segunda ordem, primeiro com relação à variável x e a seguir em relação a y , da função $G(x, y, \alpha)$, é a somatória de (4.68) (4.69) e (4.70):

$$\frac{\partial^2 G(x, y, \alpha)}{\partial x \partial y} = \frac{3xyG}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{4x \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} - \frac{4y \operatorname{sen} \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} \quad (4.71)$$

A derivada parcial de segunda ordem da função $G(x, y, \alpha)$ com relação à variável y , será:

$$\frac{\partial^2 G(x, y, \alpha)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{yG}{(1-x^2-y^2)} + \frac{2y(y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{2 \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)} \right] \quad (4.72)$$

A derivada do primeiro termo do lado direito da expressão (4.72), será:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{yG}{(1-x^2-y^2)} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{(1-x^2-y^2)} \right) \cdot G(x, y, \alpha) + \frac{\partial G}{\partial y} \left(\frac{y}{(1-x^2-y^2)} \right) \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{(1-x^2-y^2)} \right) \cdot G(x, y, \alpha) + \frac{\partial G}{\partial y} \left(\frac{y}{(1-x^2-y^2)} \right) &= \left[\frac{G}{(1-x^2-y^2)} + \frac{2y^2 G}{(1-x^2-y^2)^2} \right] + \\ &+ \left[\frac{y^2 G}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{2y \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{yG}{(1-x^2-y^2)} \right) = \frac{3y^2 G}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{G}{(1-x^2-y^2)} + \frac{2y \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} \quad (4.74)$$

A derivada com relação à variável y , do segundo termo do lado direito da expressão (4.72), será:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{(1-x^2-y^2)^2} \right) \cdot (y \cos \alpha - x \sin \alpha) + \frac{\partial}{\partial y} (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \left(\frac{2y}{(1-x^2-y^2)^2} \right) = \\
& = \frac{2(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{2y \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)^2}
\end{aligned} \tag{4.75}$$

A derivada com relação à variável y , do terceiro termo do lado direito da expressão (4.72), será:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2 \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)} \right) = \frac{4y \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} \tag{4.76}$$

A derivada parcial de segunda ordem com relação à variável y , da função $G(x, y, \alpha)$ será então, dada pela somatória de (4.74) (4.75) e (4.76):

$$\frac{\partial^2 G(x, y, \alpha)}{\partial y^2} = \frac{3y^2 G}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{G}{(1-x^2-y^2)} + \frac{8y \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{2(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} \tag{4.77}$$

Obtidas as derivadas parciais de segunda ordem da função $G(x, y, \alpha)$ necessárias para a obtenção da força hidrodinâmica não-linear dada pela equação (4.42). O próximo passo é a substituição das equações (4.66), (4.71) e (4.77) na (4.42), que será:

$$f = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \frac{F}{\sigma W} = 2 \cdot \begin{bmatrix} \left(x - 2\dot{y} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G(x, y, \alpha) & - \left(y + 2\dot{x} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y, \alpha) \\ \left(x - 2\dot{y} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} G(x, y, \alpha) & - \left(y + 2\dot{x} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G(x, y, \alpha) \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \frac{F}{\sigma W} = 2 \cdot \begin{bmatrix} \left(x - 2\dot{y} \right) \left[\frac{3xyG}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{4x \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} - \frac{4y \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} \right] + \\ - \left(y + 2\dot{x} \right) \left[\frac{3x^2G}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{G}{(1-x^2-y^2)} - \frac{8x \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{2(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} \right] \\ \left(x - 2\dot{y} \right) \left[\frac{3y^2G}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{G}{(1-x^2-y^2)} + \frac{8y \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{2(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} \right] + \\ - \left(y + 2\dot{x} \right) \left[\frac{3xyG}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{4x \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} - \frac{4y \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} \right] \end{bmatrix}$$

(4.78)

A força hidrodinâmica não-linear é dada pelo sistema de equações (4.78) composto por suas componentes nas direções x e y do sistema de referência $Oxyz$.

As equações das componentes da força de sustentação serão desenvolvidas, para melhor simplificação das expressões:

$$\begin{aligned}
f_x = & (x - 2\dot{y}) \left[\frac{3xyG}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{4x \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} - \frac{4y \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} \right] + \\
& - (y + 2\dot{x}) \left[\frac{3x^2G}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{G}{(1-x^2-y^2)} - \frac{8x \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{2(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Desenvolvendo-se a expressão (4.79):

$$\begin{aligned}
f_x = & \frac{3xyG[(x - 2\dot{y})y - (y + 2\dot{x})x]}{(1-x^2-y^2)^2} - (y - 2\dot{x}) \frac{G}{(1-x^2-y^2)} - 2(y + 2\dot{x}) \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} \right) + \\
& + (y + 2\dot{x}) \frac{8x \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} + (x - 2\dot{y}) \frac{4x \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} - (x - 2\dot{y}) \frac{4y \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)^2}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

O mesmo procedimento é utilizado para a obtenção da componente f_y da força não-linear:

$$\begin{aligned}
f_y = & (x - 2\dot{y}) \left[\frac{3y^2G}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{G}{(1-x^2-y^2)} + \frac{8y \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{2(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} \right] + \\
& - (y + 2\dot{x}) \left[\frac{3xyG}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{4x \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} - \frac{4y \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Desenvolvendo-se, então, a expressão acima:

$$\begin{aligned}
f_y = & \frac{3yG}{(1-x^2-y^2)^2} [(x-2\dot{y})y - (y+2\dot{x})x] + (x-2\dot{y}) \frac{G}{(1-x^2-y^2)} + \\
& + 2(x-2\dot{y}) \frac{(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} + (x-2\dot{y}) \frac{8y \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} - (y+2\dot{x}) \frac{4x \cos \alpha}{(1-x^2-y^2)^2} + \\
& + (y+2\dot{x}) \frac{4y \sin \alpha}{(1-x^2-y^2)^2}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Portanto, as equações (4.80) e (4.82) fornecem as componentes, nas direções \mathbf{x} e \mathbf{y} , da força hidrodinâmica não-linear exercida pelo filme de óleo sobre o mancal cilíndrico. Como pode ser observado, nestas equações a substituição das derivadas parciais de segunda ordem da função $G(x, y, \alpha)$ é muito trabalhosa, mesmo se pensarmos nestas operações realizadas num computador digital.

O aperfeiçoamento deste procedimento para os mancais cilíndricos planos apresenta as componentes da força hidrodinâmica não-linear obtida através da derivação parcial de primeira ordem uma nova função analítica $V(x, y, \alpha)$. A força hidrodinâmica passa a ser dada pela soma vetorial de suas componentes nas direções \mathbf{x} e \mathbf{y} , de acordo com as derivadas parciais de $V(x, y, \alpha)$, com relação a \mathbf{x} ou \mathbf{y} .

A força hidrodinâmica não-linear (4.42) passa a ser obtida pelas expressões:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = - \left[(x-2\dot{y})^2 + (y+2\dot{x})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} \frac{\partial V(x, y, \alpha)}{\partial x} \\ \frac{\partial V(x, y, \alpha)}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{4.83}$$

A função $V(x, y, \alpha)$ é dada por:

$$V(x, y, \alpha) = \frac{2 + (y \cos \alpha - x \sin \alpha)G(x, y, \alpha)}{(1-x^2-y^2)} \tag{4.84}$$

No entanto, para simplificar ainda mais a avaliação desta força, a operação de derivação parcial da função $V(x,y,\alpha)$ pode ser substituída pela introdução de uma nova função, chamada de $F(x,y,\alpha)$, a qual, combinada com as funções $G(x,y,\alpha)$ e $V(x,y,\alpha)$, já definidas, passa a fornecer a força hidrodinâmica pelo sistema de equações:

$$f = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = - \frac{\left[(x - 2\dot{y})^2 + (y + 2\dot{x})^2 \right]^{1/2}}{(1 - x^2 - y^2)} \begin{Bmatrix} 3xV(x,y,\alpha) - \sin\alpha \cdot G(x,y,\alpha) - 2\cos\alpha \cdot F(x,y,\alpha) \\ 3yV(x,y,\alpha) + \cos\alpha \cdot G(x,y,\alpha) - 2\sin\alpha \cdot F(x,y,\alpha) \end{Bmatrix} \quad (4.85)$$

onde:

$$F(x,y,\alpha) = \frac{(x \cos\alpha + y \sin\alpha)}{(1 - x^2 - y^2)} \quad (4.86)$$

Como visto no sistema de equações (4.85), este novo procedimento dispensa a necessidade de derivações na avaliação da força hidrodinâmica não-linear, o que agiliza em muito as operações numéricas.

Para a verificação do procedimento matemático empregado para o estabelecimento destas novas funções (4.84) e (4.86), parte-se da derivação parcial de primeira ordem, da função $V(x,y,\alpha)$, primeiramente com relação à variável x e depois com relação à y .

Após a operação de derivação da função $V(x,y,\alpha)$, suas derivadas serão substituídas no sistema de equações (4.83). As componentes da força hidrodinâmica não-linear nas direções x e y , dadas tanto pelas expressões contidas no lado direito do sistema de equações (4.78), quanto pelas expressões contidas no lado direito do sistema de equações (4.85) serão comparadas.

A seguir demonstra-se o procedimento utilizado para a derivação parcial da função $V(x,y,\alpha)$ com relação à variável x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2 + (y \cos \alpha - x \sin \alpha) G(x, y, \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)} \right] &= \frac{4x}{(1 - x^2 - y^2)^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{(1 - x^2 - y^2)} \right) \cdot G + \\ &+ \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{(1 - x^2 - y^2)} \right) \end{aligned} \quad (4.87)$$

Prosseguindo com as derivações:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{(1 - x^2 - y^2)} \right) \cdot G = \left[-\frac{\sin \alpha}{(1 - x^2 - y^2)} + \frac{2x(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)^2} \right] \cdot G \quad (4.88)$$

No caso da operação de derivação do termo 2, recorda-se a derivada da função $G(x, y, \alpha)$ com relação à variável x , dada pela equação (4.50). A derivada da função $V(x, y, \alpha)$ será então:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{3xG(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)^2} - \frac{G \sin \alpha}{(1 - x^2 - y^2)} + \frac{4x}{(1 - x^2 - y^2)^2} - \frac{2 \sin \alpha (y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)^2} \quad (4.89)$$

A componente hidrodinâmica dada pela substituição de (4.89) em (4.83) é:

$$f_x = - \left[(x - 2\dot{y})^2 + (y + 2\dot{x})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{aligned} &\frac{3xG(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)^2} - \frac{G \cdot \sin \alpha}{(1 - x^2 - y^2)} + \frac{4x}{(1 - x^2 - y^2)^2} + \\ &-\frac{2 \sin \alpha (x \cos \alpha + y \sin \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.90)$$

Assim, serão igualadas as expressões contidas tanto no lado direito da equação (4.80) quanto da equação (4.90).

Para que a igualdade seja satisfeita, igualam-se os termos:

$$\frac{3xyG[(x-2\dot{y})y-(y+2\dot{x})x]}{(1-x^2-y^2)^2} = -\left[(x-2\dot{y})^2+(y+2\dot{x})^2\right]^{\frac{1}{2}} \frac{3xG(y\cos\alpha-x\sin\alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} \quad (4.91)$$

$$\frac{(y-2\dot{x})G}{(1-x^2-y^2)} = -\left[(x-2\dot{y})^2+(y+2\dot{x})^2\right]^{\frac{1}{2}} \frac{G\sin\alpha}{(1-x^2-y^2)} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} & -2(y+2\dot{x})\left(\frac{y\cos\alpha-x\sin\alpha}{(1-x^2-y^2)^2}\right) + \frac{(y-2\dot{x})8x\sin\alpha}{(1-x^2-y^2)^2} + (x-2\dot{y})\frac{4x\cos\alpha}{(1-x^2-y^2)^2} + \\ & -(x-2\dot{y})\frac{4y\sin\alpha}{(1-x^2-y^2)^2} = -\left[(x-2\dot{y})^2+(y+2\dot{x})^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{4x}{(1-x^2-y^2)^2} + \right. \\ & \left. -\frac{2\sin\alpha(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}{(1-x^2-y^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (4.93)$$

Para verificar a igualdade da relação (4.91), eleva-se toda a expressão ao quadrado:

$$\begin{aligned} & [(x-2\dot{y})y-(y+2\dot{x})x]^2 = [(x-2\dot{y})^2+(y+2\dot{x})^2](y\cos\alpha-x\sin\alpha)^2 \\ & [(x-2\dot{y})y-(y+2\dot{x})x]^2 = [(x-2\dot{y})^2+(y+2\dot{x})^2](y^2\cos^2\alpha-2xy\sin\alpha\cos\alpha+x^2\sin^2\alpha) \\ & [(x-2\dot{y})y-(y+2\dot{x})x]^2 = \begin{bmatrix} (x-2\dot{y})^2y^2\cos^2\alpha-2xy(x-2\dot{y})^2\sin\alpha\cos\alpha+ \\ +(x-2\dot{y})^2x^2\sin^2\alpha+(y+2\dot{x})^2y^2\cos^2\alpha+ \\ -2xy(y+2\dot{x})^2\sin\alpha\cos\alpha+(y+2\dot{x})^2x^2\sin^2\alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\text{Porém, } \operatorname{tg}\alpha = \frac{(y+2\dot{x})}{(x-2\dot{y})}$$

$$\text{Assim: } \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{(y+2\dot{x})}{(x-2\dot{y})} \quad \text{ou} \quad (x-2\dot{y})\sin\alpha = (y+2\dot{x})\cos\alpha \quad (4.95)$$

Substituindo a expressão **(4.95)** na **(4.94)**:

$$\begin{aligned}
 [(x - 2\dot{y})y - (y + 2\dot{x})x]^2 &= \begin{bmatrix} (x - 2\dot{y})^2 y^2 \cos^2 \alpha - 2xy(x - 2\dot{y})^2 \sin \alpha \cos \alpha + \\ + (y + 2\dot{x})^2 x^2 \cos^2 \alpha + (x - 2\dot{y})^2 y^2 \sin^2 \alpha + \\ - 2xy(y + 2\dot{x})^2 \sin \alpha \cos \alpha + (y + 2\dot{x})^2 x^2 \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \\
 [(x - 2\dot{y})y - (y + 2\dot{x})x]^2 &= \begin{bmatrix} (x - 2\dot{y})^2 y^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2xy(x - 2\dot{y})^2 \sin \alpha \cos \alpha + \\ + (y + 2\dot{x})^2 x^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2xy(y + 2\dot{x})^2 \sin \alpha \cos \alpha \end{bmatrix} \\
 [(x - 2\dot{y})y - (y + 2\dot{x})x]^2 &= \begin{bmatrix} (x - 2\dot{y})^2 y^2 - 2xy(x - 2\dot{y})(y + 2\dot{x}) \cos^2 \alpha + \\ + (y + 2\dot{x})^2 x^2 - 2xy(y + 2\dot{x})(x - 2\dot{y}) \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \\
 [(x - 2\dot{y})y - (y + 2\dot{x})x]^2 &= \begin{bmatrix} (x - 2\dot{y})^2 y^2 - 2xy(x - 2\dot{y})(y + 2\dot{x})(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \\ + (y + 2\dot{x})^2 x^2 \end{bmatrix} \\
 [(x - 2\dot{y})y - (y + 2\dot{x})x]^2 &= [(x - 2\dot{y})^2 y^2 - 2xy(x - 2\dot{y})(y + 2\dot{x}) + (y + 2\dot{x})^2 x^2] \quad \textbf{(4.96)}
 \end{aligned}$$

A expressão **(4.96)** é a verificação da igualdade proposta em **(4.91)**. O próximo passo é o estabelecimento das relações de igualdade na **(4.92)**

$$(y + 2\dot{x}) = - \left[(x - 2\dot{y})^2 + (y + 2\dot{x})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \sin \alpha \quad \textbf{(4.97)}$$

Assim, para verificar esta igualdade, procede-se de maneira semelhante à anterior, elevando-se toda a expressão ao quadrado:

$$(y + 2\dot{x})^2 = \left[(x - 2\dot{y})^2 + (y + 2\dot{x})^2 \right] \cdot \sin^2 \alpha$$

Aplicando-se a relação (4.95):

$$(y + 2\dot{x})^2 = (y + 2\dot{x})^2 \cos^2 \alpha + (y + 2\dot{x})^2 \sin^2 \alpha$$

$$(y + 2\dot{x})^2 = (y + 2\dot{x})^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \quad (4.98)$$

Demonstra-se, assim, a igualdade na expressão (4.92). Resta agora o estabelecimento das relações de igualdade para a expressão (4.93):

Inicialmente verifica-se a igualdade:

$$-2(y + 2\dot{x}) \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{(1 - x^2 - y^2)^2} \right) = - \left[(x - 2\dot{y})^2 + (y + 2\dot{x})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(- \frac{2 \sin \alpha (x \cos \alpha + y \sin \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)^2} \right) \quad (4.99)$$

Trabalhando-se somente os numeradores:

$$-2(y + 2\dot{x})(y \cos \alpha - x \sin \alpha) = - \left[(x - 2\dot{y})^2 + (y + 2\dot{x})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot [-2 \sin \alpha \cdot (y \cos \alpha - x \sin \alpha)]$$

Através da expressão (4.97) percebe-se a validade da igualdade da expressão acima (4.99).

Os outros termos são:

$$\frac{(y - 2\dot{x})8x \sin \alpha}{(1 - x^2 - y^2)^2} + \frac{(x - 2\dot{y})4x \cos \alpha}{(1 - x^2 - y^2)^2} - \frac{(x - 2\dot{y})4y \sin \alpha}{(1 - x^2 - y^2)^2} = - \left[(x - 2\dot{y})^2 + (y + 2\dot{x})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{4x}{(1 - x^2 - y^2)^2} \quad (4.100)$$

Trabalhando-se os numeradores:

$$(x - 2\dot{y})4x \cos \alpha - (x - 2\dot{y})4y \sin \alpha + (y + 2\dot{x})8x \sin \alpha = -\left[(x - 2\dot{y})^2 + (y + 2\dot{x})^2\right]^{\frac{1}{2}}.4x \quad (4.101)$$

Das relações (4.95) e lembrando-se que, da Figura 4.3 podem ser obtidos:

$$\sin \vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Considerando-se que $\alpha \leq \vartheta \leq \alpha + \pi$:

$$(x - 2\dot{y})\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = (y + 2\dot{x})\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad (x - 2\dot{y})y = (y + 2\dot{x})x \quad (4.102)$$

Substituindo-se as relações (4.102) e (4.95) em (4.101):

$$(x - 2\dot{y})4x \cos \alpha + (y + 2\dot{x})4x \sin \alpha = -\left[(x - 2\dot{y})^2 + (y + 2\dot{x})^2\right]^{\frac{1}{2}}.4x \quad (4.103)$$

Elevando-se a expressão (4.103) ao quadrado:

$$\begin{aligned} (x - 2\dot{y})^2 16x^2 \cos^2 \alpha + 32xy(x - 2\dot{y})(y + 2\dot{x})x^2 \sin \alpha \cos \alpha + (y + 2\dot{x})^2 16x^2 \sin^2 \alpha = \\ = \left[(x - 2\dot{y})^2 + (y + 2\dot{x})^2\right].16x^2 \end{aligned}$$

$$(x - 2\dot{y})^2 16x^2 + (y + 2\dot{x})^2 16x^2 = 16x^2(x - 2\dot{y})^2 + 16x^2(y + 2\dot{x})^2 \quad (4.104)$$

Portanto, como os termos são iguais, a igualdade (4.101) e, conseqüentemente, a (4.93) são válidas.

Verifica-se assim a igualdade entre os termos apresentados no primeiro e no segundo métodos, com relação à componente da força hidrodinâmica não-linear, na direção \mathbf{x} , dada pelos

sistemas de equações (4.78) e (4.83). No sistema de equações (4.83), as componentes \mathbf{F}_x e \mathbf{F}_y são dadas em função da derivação da função $V(x, y, \alpha)$.

Para que a força hidrodinâmica não-linear seja avaliada pela forma apresentada no sistema de equações (4.85), é necessário que o último termo do lado direito da equação (4.89) seja desenvolvido como:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot \sin \alpha \cdot (y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)^2} &= \frac{2 \cdot \cos \alpha \cdot \left(y \sin \alpha - \frac{x \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right)}{(1 - x^2 - y^2)^2} = -\frac{2x}{(1 - x^2 - y^2)^2} + \\ &+ \frac{2 \cdot \cos \alpha \cdot (x \cos \alpha + y \sin \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)^2} \end{aligned} \quad (4.105)$$

Substituindo-se agora a expressão (4.105) na (4.89):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{3xG \cdot (y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)^2} - \frac{G \cdot \sin \alpha}{(1 - x^2 - y^2)} + \frac{6x}{(1 - x^2 - y^2)^2} - 2 \cos \alpha \frac{(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}{(1 - x^2 - y^2)^2} \quad (4.106)$$

Portanto, substituindo-se a expressão (4.106) em (4.83), obtém-se um equacionamento para a componente \mathbf{F}_x da força hidrodinâmica, equivalente ao da expressão (4.80), função das derivadas de segunda ordem de $G(x, y, \alpha)$.

A mesma análise é válida para a componente \mathbf{F}_y da força hidrodinâmica não-linear.

4.3 Modelo Matemático para Mancal Segmentado

4.3.1 Introdução

Depois de apresentado o modelo matemático para o mancal cilíndrico, segue a verificação do desenvolvimento do modelo matemático para representar as forças hidrodinâmicas não-lineares exercidas pelo filme de óleo existente entre as partes internas de um mancal segmentado, apresentado por [10].

Este procedimento consiste no estabelecimento de expressões matemáticas que consideram a geometria envolvida no mancal tipo segmentado, com pás pivotadas centralmente. Após o estabelecimento destas expressões, emprega-se o procedimento já apresentado para mancais cilíndricos, obtendo assim, as componentes nas direções x e y da força hidrodinâmica não-linear induzida no rotor pelo movimento relativo entre as partes internas do sistema composto pelo rotor e pelo mancal e seu lubrificante.

As Figuras 4.4 (a) e (b) representam esquematicamente uma seção transversal de um rotor e um mancal tipo segmentado com representação de uma pá. Na próxima página a Figura 4.4 (a) representa o esquema de uma pá do mancal e o rotor, para uma posição centrada do rotor em relação ao mancal, no repouso. A Figura 4.4 (b) representa a mesma seção do mancal, agora com o movimento de rotação da pá ao redor de seu ponto de fixação, devido ao movimento do rotor.

Um dos parâmetros mais importantes no emprego de mancais hidrodinâmicos é a **função espessura do filme de óleo**, já que é fundamental evitar o toque do rotor com as partes internas do mancal, durante a operação da máquina rotativa. Correlacionada com a função espessura do filme de óleo está a folga radial, C . R_0 é a distância entre o centro O do mancal e o ponto A de fixação da pá. A posição angular de fixação da pá é ψ_0 . Quando há o movimento do rotor, a pá ajusta-se ao perfil de pressões desenvolvido no filme de óleo e gira de um ângulo ψ , ao redor do ponto de fixação A . h é a espessura do filme de óleo e θ é a coordenada angular do centro do eixo no interior do mancal.

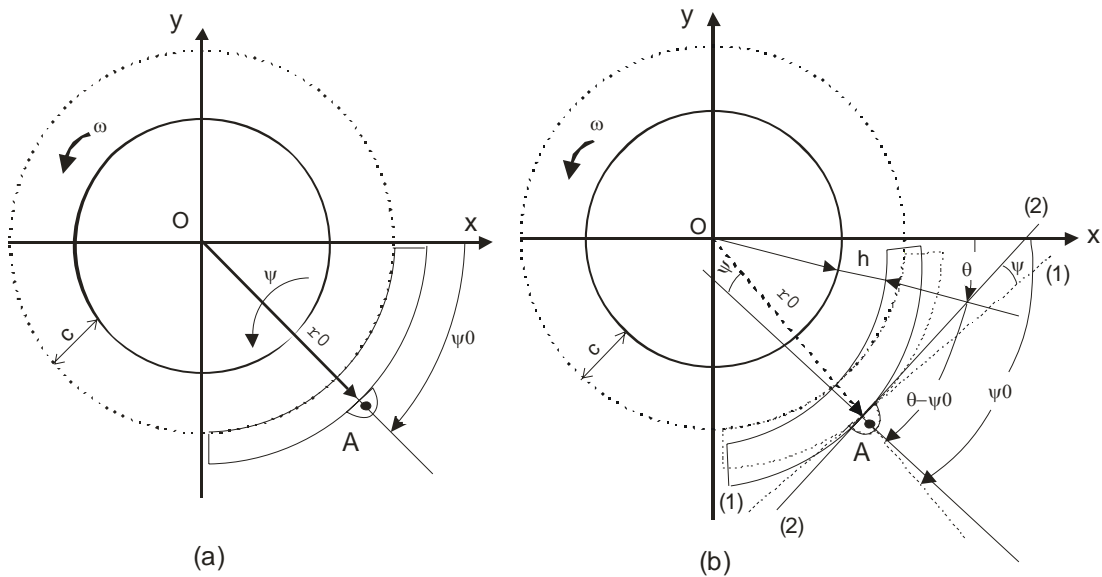


Figura 4.4: Esquema representativo de seção transversal do rotor-mancal segmentado (a) representação para uma pá, rotor centrado e (b) mesma seção, descentrado.

Onde:

C folga radial

R_0 é a distância entre o centro O do mancal e o ponto A de fixação da pá

ψ_0 posição angular de fixação da pá

ϑ é a coordenada angular do centro do eixo no interior do mancal

ψ ângulo ao redor do ponto de fixação

h é a espessura do filme de óleo

A função espessura do filme de óleo é dada pela expressão (3.18), já vista no capítulo anterior.

4.3.2 Força Hidrodinâmica

A força hidrodinâmica não-linear será obtida pela integração da equação que fornece a pressão hidrodinâmica existente dentro do mancal, na área de contato, em cada pá, definida por um ângulo inicial ϑ_1 e um ângulo final ϑ_2 . A força será obtida pela soma vetorial das componentes nas direções \mathbf{x} e \mathbf{y} de cada pá.

As componentes \mathbf{F}_x e \mathbf{F}_y da força hidrodinâmica dependem da espessura h do filme de óleo e de sua variação ao longo da coordenada angular ϑ da pá. Serão dadas pela integração da equação da pressão fornecida pela expressão (3.32) análoga ao mancal cilíndrico:

$$p(\vartheta, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left[\frac{[(x - \psi y_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi} x_0)] \sin \vartheta - [(y + \psi x_0) + 2(\dot{x} - \dot{\psi} y_0)] \cos \vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]^3} \right] (4z^2 - 1)$$

ou seja:

$$\bar{\mathbf{F}} = - \int_{\bar{A}} \bar{p} \cdot d\bar{\mathbf{A}} \quad \text{e} \quad A = R d\vartheta \cdot L dz$$

Para:

$$p_0 = 6\mu\omega \frac{R^2}{C^2}$$

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = -3\mu\omega \frac{R^2}{C^2} \frac{L^2}{D^2} (RL) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left[\frac{[(x - \psi y_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi} x_0)] \sin \vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]^3} + \frac{[(y + \psi x_0) + 2(\dot{x} - \dot{\psi} y_0)] \cos \vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]^3} \right] (4z^2 - 1) \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{Bmatrix} d\vartheta dz$$

(4.107)

Introduzindo o *número de Sommerfeld* modificado:

$$\sigma = \text{So} \left(\frac{L^2}{D^2} \right) \text{ ou}$$

$$\sigma = \frac{\mu\omega}{W} \left(\frac{R^2}{C^2} \right) \left(\frac{L^2}{D^2} \right) (RL)$$

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = 3\sigma W \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left[\frac{[(x - \psi y_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi} x_0)] \text{sen } \vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \text{sen } \vartheta]^3} + \frac{[(y + \psi x_0) + 2(\dot{x} - \dot{\psi} y_0)] \cos \vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \text{sen } \vartheta]^3} \right] \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \\ \text{sen } \vartheta \end{Bmatrix} (4z^2 - 1) d\vartheta dz \quad (4.108)$$

$$f = \frac{F}{\sigma W} = -3 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left[\frac{[(x - \psi y_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi} x_0)] \text{sen } \vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \text{sen } \vartheta]^3} + \frac{[(y + \psi x_0) + 2(\dot{x} - \dot{\psi} y_0)] \cos \vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \text{sen } \vartheta]^3} \right] \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \\ \text{sen } \vartheta \end{Bmatrix} (4z^2 - 1) d\vartheta dz \quad (4.109)$$

Integrando-se (4.109), vem:

$$f = 2 \left[\begin{aligned} & \left[(x - \psi y_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi} x_0) \right] \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\text{sen } \vartheta \cos \vartheta}{h^3} d\vartheta - \left[(y + \psi y_0) - 2(\dot{x} - \dot{\psi} y_0) \right] \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\cos^2 \vartheta}{h^3} d\vartheta \\ & \left[(x - \psi y_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi} x_0) \right] \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\text{sen}^2 \vartheta}{h^3} d\vartheta - \left[(y + \psi y_0) - 2(\dot{x} - \dot{\psi} y_0) \right] \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\text{sen } \vartheta \cos \vartheta}{h^3} d\vartheta \end{aligned} \right] \quad (4.110)$$

As expressões acima fornecem as componentes das forças não-lineares exercidas nas direções x e y , do sistema de referência fixado ao centro do mancal, pelo filme de óleo de uma pá sobre o rotor. Para obtê-las é necessário resolver as integrais abaixo:

$$I_1 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\cos^2 \vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]^3} d\vartheta \quad (4.111)$$

$$I_2 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]^3} d\vartheta \quad (4.112)$$

$$I_3 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\sin^2 \vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]^3} d\vartheta \quad (4.113)$$

As integrais I_1 , I_2 e I_3 são de difícil solução analítica. Conforme a metodologia apresentada para mancais cilíndricos, uma aproximação matemática, através de uma solução do tipo indireta será descrita por:

$$G(x, y, \psi, \vartheta) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]} \quad (4.114)$$

A função analítica G torna-se dependente de novos parâmetros, que consideram agora tanto a rotação ψ da pá, compreendida entre os ângulos inicial ψ_1 e final ψ_2 , quanto os ângulos ϑ_1 e ϑ_2 , que são os ângulos inicial e final das coordenadas angulares que delimitam cada pá. No procedimento a seguir, por simplificação, a função $G(x, y, \psi, \vartheta)$ será abreviada por G

Reescrevendo-se a integral (4.114):

$$G' = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{\{1 - [(x - \psi y_0) \cos \vartheta + (y + \psi x_0) \sin \vartheta]\}} \quad (4.115)$$

Para resolver a integral **(4.115)**, multiplicam-se o numerador e o denominador da integral por:

$$G' = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{1 - [(x - \psi y_0) \cos \vartheta + (y + \psi x_0) \sin \vartheta]} \cdot \frac{1 + [(x - \psi y_0) \cos \vartheta + (y + \psi x_0) \sin \vartheta]}{1 + [(x - \psi y_0) \cos \vartheta + (y + \psi x_0) \sin \vartheta]}$$

$$G' = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{\left\{1 + [(x - \psi y_0) \cos \vartheta + (y + \psi x_0) \sin \vartheta]\right\}^2} + \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{[(x - \psi y_0) \cos \vartheta + (y + \psi x_0) \sin \vartheta] d\vartheta}{\left\{1 + [(x - \psi y_0) \cos \vartheta + (y + \psi x_0) \sin \vartheta]\right\}^2}$$

(4.116)

Chamando-se a primeira integral do lado direito da equação **(4.116)** de G_1' e a segunda de G_2' :

$$G' = G_1' + G_2'$$

Trabalhando-se o denominador das integrais, este pode ser desenvolvido como:

$$\left\{1 - [(x - \psi y_0) \cos \vartheta + (y + \psi x_0) \sin \vartheta]\right\}^2 = 1 - (x - \psi y_0)^2 - (y + \psi x_0)^2 +$$

$$+ [(y + \psi x_0) \cos \vartheta - (x - \psi y_0) \sin \vartheta]^2$$

(4.117)

Ou ainda:

$$\left\{1 - [(x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]\right\}^2 = \left[1 - (x - \psi y_0)^2 - (y + \psi x_0)^2\right] \cdot$$

$$\left[1 + \frac{[(y + \psi x_0) \cos \vartheta - (x - \psi y_0) \sin \vartheta]}{1 - (x - \psi y_0)^2 - (y + \psi x_0)^2}\right]^2$$

(4.118)

Substituindo-se esta expressão equivalente ao denominador, na equação G_2' :

$$G_2' = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{[(x - \psi y_0) \cos \vartheta + (y + \psi x_0) \sin \vartheta]}{\left[1 - (x - \psi y_0)^2 - (y + \psi x_0)^2\right] \cdot \left[1 + \frac{[(y + \psi x_0) \cos \vartheta - (x - \psi y_0) \sin \vartheta]}{1 - (x - \psi y_0)^2 - (y + \psi x_0)^2}\right]^2} d\vartheta \quad (4.119)$$

Chamando-se:

$$k = \frac{(y + \psi x_0) \cos \vartheta - (x - \psi y_0) \sin \vartheta}{\sqrt{1 - (x - \psi y_0)^2 - (y + \psi x_0)^2}} \quad (4.120)$$

A integral G_2' passa a ser do tipo

$$G_2' = - \frac{1}{\sqrt{1 - (x - \psi y_0)^2 - (y + \psi x_0)^2}} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{dk}{(1 + k^2)} \quad (4.121)$$

A integral da equação (4.121) tem por solução:

$$G_2' = - \frac{1}{\sqrt{1 - (x - \psi y_0)^2 - (y + \psi x_0)^2}} \arctg \left(\frac{(y + \psi x_0) \cos \vartheta - (x - \psi y_0) \sin \vartheta}{\sqrt{1 - (x - \psi y_0)^2 - (y + \psi x_0)^2}} \right) \Bigg|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \quad (4.122)$$

Resolvendo-se a integral G_1' :

$$G_1' = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{1 - [(x - \psi y_0) \cos \vartheta + (y + \psi x_0) \sin \vartheta]^2} \quad (4.123)$$

Da figura 3.8 e das expressões de **h** (3.18) e (3.28):

$$\sin \vartheta = \frac{(y + \psi x_0)}{\sqrt{(x - \psi y_0)^2 + (y + \psi x_0)^2}} \quad (4.124)$$

$$\cos \vartheta = \frac{(x - \psi y_0)}{\sqrt{(x - \psi y_0)^2 + (y + \psi x_0)^2}}$$

Substituindo-se as expressões (4.124) na expressão (4.123):

$$G_1' = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{1 - \left[(x - \psi y_0)^2 + (y + \psi x_0)^2 \right]} = \frac{\vartheta}{1 - (x - \psi y_0)^2 - (y + \psi x_0)^2} \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \quad (4.125)$$

A função $G(x, y, \psi, \vartheta)$ pode, então, ser escrita como:

$$G(x, y, \psi, \vartheta) = \left[\frac{\vartheta}{\sqrt{1 - (x - \psi y_0)^2 - (y + \psi x_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (x - \psi y_0)^2 - (y + \psi x_0)^2}} \cdot \arctg \left(\frac{(y + \psi x_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta}{\sqrt{1 - (x - \psi y_0)^2 - (y + \psi x_0)^2}} \right) \right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \quad (4.126)$$

A equação (4.125) possibilita, através das regras de derivação para uma função integral, apresentar as relações que envolvem a solução das integrais (4.111), (4.112) e (4.113). A solução destas integrais permite a obtenção das componentes da força hidrodinâmica não-linear nas direções x e y , como mostrado pelo sistema de equações (4.110).

Como já demonstrado para o caso dos mancais cilíndricos, no item 4.2 anterior, apresenta-se a seguir os resultados das operações de derivação da nova função $G(x, y, \psi, \vartheta)$ com relação às variáveis x , y e xy :

Derivada primeira, parcial, da função $G(x, y, \psi, \vartheta)$ com relação à variável x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta} = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]^2} \quad (4.127)$$

Derivada segunda, parcial, da função $G(x, y, \psi, \vartheta)$ com relação à variável x :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta} = 2 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\cos^2 \vartheta d\vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]^3} \quad (4.128)$$

Portanto, a integral \mathbf{I}_1 será a metade da derivada segunda parcial da função $G(x, y, \psi, \vartheta)$ com relação à variável \mathbf{x} :

$$I_1 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\cos^2 \vartheta d\vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]^3} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y, \psi, \vartheta) \quad (4.129)$$

As integrais \mathbf{I}_2 e \mathbf{I}_3 analogamente serão dadas por:

$$I_2 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]^3} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G(x, y, \psi, \vartheta) \quad (4.130)$$

e

$$I_3 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\sin^2 \vartheta d\vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]^3} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} G(x, y, \psi, \vartheta) \quad (4.131)$$

Substituindo-se as equações (4.129), (4.130) e (4.131) no sistema de equações (4.110), a força hidrodinâmica não-linear será:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{F}}{\sigma W} = \begin{bmatrix} [(x - \psi y_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi} x_0)] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G - [(y + \psi x_0) + 2(\dot{x} - \dot{\psi} y_0)] \frac{\partial^2}{\partial x^2} G \\ [(x - \psi y_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi} x_0)] \frac{\partial^2}{\partial y^2} G - [(y + \psi x_0) + 2(\dot{x} - \dot{\psi} y_0)] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

No procedimento proposto por **CAVALCA et al. [10]**, a força hidrodinâmica pode ser calculada pelo estabelecimento de uma função $V(x, y, \psi, \vartheta)$, que considera a nova geometria envolvida, seguindo-se o mesmo procedimento anteriormente descrito para o mancal tipo cilíndrico:

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = -\sqrt{[(x - \psi y_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi} x_0)]^2 + [(y + \psi x_0) - 2(\dot{x} - \dot{\psi} y_0)]^2} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.133)$$

onde:

$$V(x, y, \psi, \vartheta) = \frac{1 - [(x - \psi y_0) \cos \vartheta - (\dot{y} + \dot{\psi} x_0) \sin \vartheta] G(x, y, \psi, \vartheta)}{[1 - (x - \psi y_0)^2 - (y + \psi x_0)^2]} \quad (4.134)$$

e

$$F(x, y, \psi, \vartheta) = \frac{(x - \psi y_0) \cos \vartheta + (y + \psi x_0) \sin \vartheta}{[1 - (x - \psi y_0) \cos \vartheta - (y + \psi x_0) \sin \vartheta]} \quad (4.135)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} &= \frac{-\sqrt{[(x - \psi y_0) - 2(\dot{y} + \dot{\psi} x_0)]^2 + [(y + \psi x_0) - 2(\dot{x} - \dot{\psi} y_0)]^2}}{[1 - (x - \psi y_0)^2 - (y + \psi x_0)^2]} \\ &\cdot \begin{Bmatrix} 3(x - \psi y_0)V(x, y, \psi, \vartheta) + \sin \vartheta G(x, y, \psi, \vartheta) - \cos \vartheta F(x, y, \psi, \vartheta) \\ 3(y + \psi x_0)V(x, y, \psi, \vartheta) - \cos \vartheta G(x, y, \psi, \vartheta) - \sin \vartheta F(x, y, \psi, \vartheta) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.136)$$

Essas funções definidas para o mancal segmentado, devem ser avaliadas desde o ângulo inicial ϑ_1 até o ângulo final ϑ_2 de cada pá. A força hidrodinâmica total será dada pela soma das componentes nas direções **x** e **y**, de todas as pás do mancal segmentado.

Nesta fase do trabalho, desenvolveu-se o procedimento apresentado por **CAVALCA et al. [10]** para a obtenção da força hidrodinâmica. O primeiro passo é a derivação da função $G(x, y, \psi, \vartheta)$ e a substituição destas derivadas no sistema de equações (4.132):

Derivação da função $G(x, y, \psi, \vartheta)$ com relação à variável **x**:

Para simplificar as operações de derivação parcial em **x** e **y**, define-se:

$$\begin{aligned}\underline{x} &= (x - \psi y_0) \\ \underline{y} &= (y + \psi x_0)\end{aligned}\tag{4.137}$$

A função $G(x, y, \psi, \vartheta)$ passa a ser escrita então como:

$$G(x, y, \psi, \vartheta) = \frac{\vartheta}{\sqrt{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2}} \arctg \left(\frac{\underline{x} \cos \vartheta - \underline{y} \sin \vartheta}{\sqrt{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2}} \right)\tag{4.138}$$

Sua derivação será a soma da derivação de cada um dos termos que compõem o lado direito da equação acima, que serão chamados de **G1''** e **G2''**:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_1''}{\partial \underline{x}} &= \frac{\vartheta \underline{x}}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial G_2''}{\partial \underline{x}} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2}} \right) \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \arctg \left(\frac{\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta}{\sqrt{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2}} \right) + \\ &\quad + \arctg \left(\frac{\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta}{\sqrt{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2}} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2}} \right)\end{aligned}\tag{4.139}$$

Substituindo-se estas derivadas na operação de derivação parcial da função $G(x, y, \psi, \vartheta)$:

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{x}} = \frac{\underline{\vartheta} \underline{x}}{\sqrt{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2}} - \frac{\underline{x}}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta}{\sqrt{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2}} \right) +$$

$$\left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta}{\sqrt{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2}} \right)^2} \left[\frac{-\sin \alpha}{\sqrt{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2}} + \frac{\underline{x}(\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta)}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \right\} \quad (4.140)$$

De maneira análoga ao já demonstrado para o caso dos mancais hidrodinâmicos cilíndricos, apresentam-se à seguir as expressões desenvolvidas para as derivadas primeiras parciais em x e y da nova função $G(x, y, \psi, \vartheta)$

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{x}} = \frac{\underline{x} \cdot G}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)} + \frac{\sin \vartheta}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)} - \frac{\underline{x}(\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta)}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \quad (4.141)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{y}} = \frac{\underline{y} \cdot G}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)} - \frac{\cos \vartheta}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)} - \frac{\underline{y}(\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta)}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \quad (4.142)$$

A partir das expressões (4.141) e (4.142), realizam-se novas operações de derivação parcial destas expressões com relação às variáveis \underline{x} , e \underline{y} .

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \underline{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{x}} \right) = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left[\frac{\underline{x} \cdot G}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)} + \frac{\sin \vartheta}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)} - \frac{\underline{x}(\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta)}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \right] \quad (4.143)$$

Para a simplificação da operação de derivação, a expressão acima será dividida em três termos, assim, a derivada em \underline{x} do primeiro termo do lado direito da expressão, será:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left(\frac{\underline{x}G}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)} \right) = \frac{\underline{x}}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)} \frac{\partial G}{\partial \underline{x}} + G \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left(\frac{\underline{x}}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left[\frac{\underline{x}G}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)} \right] = \frac{\underline{x}^2 G}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} + \frac{\underline{x} \sin \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} + \frac{G}{1-\underline{x}^2-\underline{y}^2} + \frac{2\underline{x}^2 G}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} \quad (4.144)$$

A derivada parcial em \underline{x} do segundo termo do lado direito da expressão, será:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left[\frac{\sin \vartheta}{1-\underline{x}^2-\underline{y}^2} \right] = \frac{2\underline{x} \sin \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} \quad (4.145)$$

A derivada parcial em \underline{x} do terceiro termo do lado direito da expressão, será, então:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left[\frac{\underline{x}(\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta)}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} \right] = -\frac{\underline{x} \sin \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} + \frac{(\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta)}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} \quad (4.146)$$

A derivada parcial de segunda ordem da função $G(\underline{x}, \underline{y}, \psi, \vartheta)$, com relação à variável \underline{x} , será então a soma das expressões (4.144), (4.145) e (4.146):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \underline{x}^2} = \frac{3\underline{x}^2 G}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} + \frac{G}{1-\underline{x}^2-\underline{y}^2} + \frac{4\underline{x} \sin \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} - \frac{(\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta)}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} \quad (4.147)$$

A derivada segunda parcial, com relação à variável \underline{y} , de $\frac{\partial G}{\partial \underline{x}}$ pode ser obtida de:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{y}} \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{x}} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial \underline{x} \partial \underline{y}} = \frac{\partial}{\partial \underline{y}} \left[\frac{\underline{x}G}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)} + \frac{\sin \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)} - \frac{\underline{x}(\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta)}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} \right] \quad (4.148)$$

Para a simplificação da operação de derivação da função, a expressão acima será dividida em três termos, assim, a derivada parcial em \underline{y} do primeiro termo do lado direito da expressão, será:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{y}} \left[\frac{\underline{x}G}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)} \right] = \frac{\underline{x}\underline{y}G}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} - \frac{\underline{x} \cos \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} + \frac{2\underline{x}\underline{y}G}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} \quad (4.149)$$

A derivada parcial em \underline{y} do segundo termo do lado direito da expressão, será:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{y}} \left[\frac{\sin \vartheta}{1-\underline{x}^2-\underline{y}^2} \right] = \frac{2\underline{y} \sin \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} \quad (4.150)$$

A derivada parcial em \underline{y} do terceiro termo do lado direito da expressão, será, então:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{y}} \left[\frac{\underline{x}(\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta)}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} \right] = \frac{\underline{x} \cos \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} \quad (4.151)$$

A derivada parcial mista de segunda ordem da função $G(x,y,\psi,\vartheta)$, será então a soma das expressões (4.149), (4.150) e (4.151) :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \underline{x} \partial \underline{y}} = \frac{3\underline{x}\underline{y}G}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} - \frac{2\underline{x} \cos \alpha}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} + \frac{2\underline{y} \sin \alpha}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} \quad (4.152)$$

A seguir, demonstra-se a derivação parcial de segunda ordem da função $G(x,y,\psi,\vartheta)$, com relação à variável \underline{y} :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \underline{y}^2} = \frac{\partial}{\partial \underline{y}} \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{y}} \right) = \frac{\partial}{\partial \underline{y}} \left[\frac{\underline{y} \cdot G}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)} - \frac{\cos \vartheta}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)} - \frac{\underline{y}(\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta)}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \right] \quad (4.153)$$

Para a simplificação da operação de derivação da função, a expressão acima será dividida em três termos, assim, a derivada em \underline{y} do primeiro termo do lado direito da expressão, (4.153) será:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{y}} \left[\frac{\underline{y} G}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)} \right] = \frac{3\underline{y}^2 G}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} - \frac{\underline{y} \cos \vartheta}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} + \frac{G}{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2} \quad (4.154)$$

A derivada parcial em \underline{y} do segundo termo do lado direito da expressão, será:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{y}} \left[\frac{\cos \vartheta}{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2} \right] = \frac{2\underline{y} \cos \vartheta}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \quad (4.155)$$

A derivada parcial em \underline{y} do terceiro termo do lado direito da expressão, será, então:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{y}} \left[\frac{\underline{y}(\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta)}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \right] = -\frac{\underline{y} \cos \vartheta}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} + \frac{(\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta)}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \quad (4.156)$$

A derivada parcial de segunda ordem da função $G(x, y, \psi, \vartheta)$, com relação à variável \underline{y} , será então a soma das expressões (4.154), (4.155) e (4.156):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \underline{y}^2} = \frac{3\underline{y}^2 G}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} + \frac{G}{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2} - \frac{4\underline{y} \cos \vartheta}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} - \frac{(\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta)}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \quad (4.157)$$

Obtidas as expressões (4.147), (4.152) e (4.157), o próximo passo do procedimento é a substituição destas expressões no sistema de equações (4.132), que re-escrito, torna-se:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{F}}{\sigma W} = \begin{Bmatrix} (\underline{x} - 2\underline{\dot{y}}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G - (\underline{y} + 2\underline{\dot{x}}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} G \\ (\underline{x} - 2\underline{\dot{y}}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} G - (\underline{y} + 2\underline{\dot{x}}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G \end{Bmatrix} \quad (4.158)$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\underline{x} - 2\underline{\dot{y}}) \left[\frac{3\underline{x}\underline{y}G}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} - \frac{2\underline{x}\cos\alpha}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} + \frac{2\underline{y}\sin\alpha}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \right] + \\ -(\underline{y} + 2\underline{\dot{x}}) \left[\frac{3\underline{x}^2G}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} + \frac{G}{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2} + \frac{4\underline{x}\sin\vartheta}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} - \frac{(\underline{y}\cos\vartheta - \underline{x}\sin\vartheta)}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \right] \\ (\underline{x} - 2\underline{\dot{y}}) \left[\frac{3\underline{y}^2G}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} + \frac{G}{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2} - \frac{4\underline{y}\cos\vartheta}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} - \frac{(\underline{y}\cos\vartheta - \underline{x}\sin\vartheta)}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \right] + \\ -(\underline{y} + 2\underline{\dot{x}}) \left[\frac{3\underline{x}\underline{y}G}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} - \frac{2\underline{x}\cos\alpha}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} + \frac{2\underline{y}\sin\alpha}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \right] \end{Bmatrix} \quad (4.159)$$

Assim, as componentes, nas direções \mathbf{x} e \mathbf{y} do sistema de referência \mathbf{Oxyz} , da força hidrodinâmica não-linear são dadas pelo sistema de equações (4.159) acima.

A fim de se demonstrar o procedimento exposto por CAVALCA et al. [10], as equações que fornecem as componentes da força serão desenvolvidas, a começar pela direção \mathbf{x} :

$$f_x = (\underline{x} - 2\underline{\dot{y}}) \left[\frac{3\underline{x}\underline{y}G}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} - \frac{2\underline{x}\cos\alpha}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} + \frac{2\underline{y}\sin\alpha}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \right] + \\ -(\underline{y} + 2\underline{\dot{x}}) \left[\frac{3\underline{x}^2G}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} + \frac{G}{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2} + \frac{4\underline{x}\sin\vartheta}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} - \frac{(\underline{y}\cos\vartheta - \underline{x}\sin\vartheta)}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \right] \quad (4.160)$$

Desenvolvendo-se a expressão (4.160):

$$f_x = \frac{3\underline{x}G\left[\left(\underline{x}-2\underline{\dot{y}}\right)\underline{y}-\left(\underline{y}+2\underline{\dot{x}}\right)\underline{x}\right]}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)^2} - \frac{\left(\underline{y}+2\underline{\dot{x}}\right)G}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)} - \frac{\left(\underline{y}+2\underline{\dot{x}}\right)4\underline{x}\sin\vartheta}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)^2} +$$

$$- \frac{\left(\underline{x}-2\underline{\dot{y}}\right)2\underline{x}\cos\vartheta}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)^2} + \frac{\left(\underline{x}-2\underline{\dot{y}}\right)2\underline{y}\sin\vartheta}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)^2} + \left(\underline{y}+2\underline{\dot{x}}\right)\left(\frac{\underline{y}\cos\vartheta-\underline{x}\sin\vartheta}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)^2}\right) \quad (4.161)$$

O mesmo procedimento é utilizado para a obtenção da componente **fy** da força não-linear:

$$f_y = \left(\underline{x}-2\underline{\dot{y}}\right)\left[\frac{3\underline{y}^2G}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)^2} + \frac{G}{1-\underline{x}^2-\underline{y}^2} - \frac{4\underline{y}\cos\vartheta}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)^2} - \frac{\left(\underline{y}\cos\vartheta-\underline{x}\sin\vartheta\right)}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)^2}\right] +$$

$$-\left(\underline{y}+2\underline{\dot{x}}\right)\left[\frac{3\underline{x}\underline{y}G}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)^2} - \frac{2\underline{x}\cos\vartheta}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)^2} + \frac{2\underline{y}\sin\vartheta}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)^2}\right] \quad (4.162)$$

Desenvolvendo-se, então a expressão (4.162) acima,

$$f_y = \frac{3\underline{y}G\left[\left(\underline{x}-2\underline{\dot{y}}\right)\underline{y}-\left(\underline{y}+2\underline{\dot{x}}\right)\underline{x}\right]}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)^2} + \frac{\left(\underline{x}-2\underline{\dot{y}}\right)G}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)} - \frac{\left(\underline{x}-2\underline{\dot{y}}\right)4\underline{y}\cos\vartheta}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)^2} +$$

$$+ \frac{\left(\underline{y}+2\underline{\dot{x}}\right)2\underline{x}\cos\vartheta}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)^2} - \frac{\left(\underline{y}+2\underline{\dot{x}}\right)2\underline{y}\sin\vartheta}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)^2} - \left(\underline{x}-2\underline{\dot{y}}\right)\left(\frac{\underline{y}\cos\vartheta-\underline{x}\sin\vartheta}{\left(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2\right)^2}\right) \quad (4.163)$$

Portanto, as equações (4.161) e (4.163) fornecem as componentes, nas direções **x** e **y**, da força hidrodinâmica não-linear exercida pelo filme de óleo sobre o mancal segmentado. Como realizado no estudo dos mancais cilíndricos planos, será mostrada a seguir, a dedução das expressões que são aplicadas no sistema de equações (4.113), para o mancal segmentado.

A função $V(x,y,\psi,\vartheta)$ dada pela expressão (4.134) é re-escrita como:

$$V(x, y, \psi, \vartheta) = \frac{1 - (\underline{x} \cos \vartheta - \underline{y} \sin \vartheta) G(x, y, \psi, \vartheta)}{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2} \quad (4.164)$$

A força hidrodinâmica é dada pelo sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = -\sqrt{(\underline{x} - 2\underline{\dot{y}})^2 + (\underline{y} + 2\underline{\dot{x}})^2} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial V(x, y, \psi, \vartheta)}{\partial \underline{x}} \\ \frac{\partial V(x, y, \psi, \vartheta)}{\partial \underline{y}} \end{Bmatrix} \quad (4.165)$$

No entanto, para simplificar ainda mais a avaliação desta força, a operação de derivação parcial da função $V(x, y, \psi, \vartheta)$ pode ser substituída pela introdução de uma outra função $F(x, y, \psi, \vartheta)$, a qual, combinada com as funções $V(x, y, \psi, \vartheta)$ e $G(x, y, \psi, \vartheta)$ passa a fornecer a força através do sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = -\frac{[(\underline{x} - 2\underline{\dot{y}})^2 + (\underline{y} + 2\underline{\dot{x}})^2]^{1/2}}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)} \cdot \begin{Bmatrix} 3\underline{x}V(x, y, \psi, \vartheta) + \sin \vartheta G(x, y, \psi, \vartheta) - \cos \vartheta F(x, y, \psi, \vartheta) \\ 3\underline{y}V(x, y, \psi, \vartheta) - \cos \vartheta G(x, y, \psi, \vartheta) - \sin \vartheta F(x, y, \psi, \vartheta) \end{Bmatrix} \quad (4.166)$$

Sendo que a função $F(x, y, \psi, \vartheta)$, dada pela expressão (4.135), pode ser reescrita como:

$$F(x, y, \psi, \vartheta) = \frac{\underline{x} \cos \vartheta + \underline{y} \sin \vartheta}{[1 - \underline{x} \cos \vartheta - \underline{y} \sin \vartheta]} = \frac{\underline{x} \cos \vartheta + \underline{y} \sin \vartheta}{1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2} \quad (4.167)$$

Para a verificação do procedimento matemático empregado para o estabelecimento destas novas funções $V(x, y, \psi, \vartheta)$ (4.164) e $F(x, y, \psi, \vartheta)$ (4.167), parte-se da derivação parcial de primeira ordem, da função $V(x, y, \psi, \vartheta)$, inicialmente com relação à variável \underline{x} e posteriormente com relação à \underline{y} .

Após a operação de derivação da função $V(x,y,\psi,\vartheta)$, suas derivadas serão substituídas no sistema de equações (4.133). As componentes da força hidrodinâmica não-linear nas direções x e y , dadas tanto pelas expressões contidas no lado direito do sistema de equações (4.132), quanto pelas expressões contidas no lado direito do sistema de equações (4.165) serão comparadas.

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\underline{x} - 2\underline{\dot{y}}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G - (\underline{y} + 2\underline{\dot{x}}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} G \\ (\underline{x} - 2\underline{\dot{y}}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} G - (\underline{y} + 2\underline{\dot{x}}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G \end{Bmatrix} = -\sqrt{(\underline{x} - 2\underline{\dot{y}})^2 + (\underline{y} + 2\underline{\dot{x}})^2} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.168)$$

A seguir demonstra-se o procedimento utilizado para a derivação parcial da função $V(x,y,\psi,\vartheta)$ com relação à variável \underline{x} :

$$\frac{\partial V}{\partial \underline{x}} = -\frac{3\underline{x}G(\underline{y} \sin \vartheta - \underline{x} \cos \vartheta)}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} + \frac{\sin \vartheta \cdot G}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)} - \frac{\sin \vartheta (\underline{y} \sin \vartheta - \underline{x} \cos \vartheta)}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} + \frac{2\underline{x}}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \quad (4.169)$$

A componente hidrodinâmica dada pela substituição de (4.169) em (4.165) é:

$$f_x = -\left[(\underline{x} - 2\underline{\dot{y}})^2 + (\underline{y} + 2\underline{\dot{x}})^2\right]^{1/2} \left[\begin{aligned} &-\frac{3\underline{x}G(\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta)}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} - \frac{\sin \vartheta \cdot G}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)} + \\ &-\frac{\sin \vartheta (\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta)}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} + \frac{2\underline{x}}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \end{aligned} \right] \quad (4.170)$$

A seguir, serão igualadas as expressões contidas tanto no lado direito da equação (4.160) quanto da equação (4.170) inicialmente na direção x e a seguir, na direção y .

$$\begin{aligned}
& \frac{3\underline{x}G[(\underline{x}-2\underline{\dot{y}})\underline{y}-(\underline{y}+2\underline{\dot{x}})\underline{x}]}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} - \frac{(\underline{y}+2\underline{\dot{x}})G}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)} - \frac{(\underline{y}+2\underline{\dot{x}})4\underline{x}\text{sen } \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} + \frac{(\underline{x}-2\underline{\dot{y}})2\underline{x}\cos \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} + \frac{(\underline{x}-2\underline{\dot{y}})2\underline{y}\text{sen } \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} \\
& + (\underline{y}+2\underline{\dot{x}}) \left(\frac{\underline{y}\cos \vartheta - \underline{x}\text{sen } \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} \right) = - \left[(\underline{x}-2\underline{\dot{y}})^2 + (\underline{y}+2\underline{\dot{x}})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{3\underline{x}G(\underline{y}\text{sen } \vartheta - \underline{x}\cos \vartheta)}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} + \frac{\text{sen } \vartheta \cdot G}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)} + \\ & - \frac{\text{sen } \vartheta (\underline{y}\text{sen } \vartheta - \underline{x}\cos \vartheta)}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} + \frac{2\underline{x}}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} \end{aligned} \right\}
\end{aligned}
\tag{4.171}$$

Para que a igualdade seja satisfeita, igualam-se os termos:

$$\frac{3\underline{x}G[(\underline{x}-2\underline{\dot{y}})\underline{y}-(\underline{y}+2\underline{\dot{x}})\underline{x}]}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} = - \left[(\underline{x}-2\underline{\dot{y}})^2 + (\underline{y}+2\underline{\dot{x}})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{3\underline{x}G(\underline{y}\cos \vartheta - \underline{x}\text{sen } \vartheta)}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2}
\tag{4.172}$$

$$\frac{(\underline{y}-2\underline{\dot{x}})G}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)} = - \left[(\underline{x}-2\underline{\dot{y}})^2 + (\underline{y}+2\underline{\dot{x}})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{G \cdot \text{sen } \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)}
\tag{4.173}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\underline{x}-2\underline{\dot{y}})2\underline{x}\cos \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} + \frac{(\underline{x}-2\underline{\dot{y}})2\underline{y}\text{sen } \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} - \frac{(\underline{y}+2\underline{\dot{x}})4\underline{x}\text{sen } \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} + \frac{(\underline{y}+2\underline{\dot{x}})\underline{y}\cos \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} - \frac{(\underline{y}+2\underline{\dot{x}})\underline{x}\text{sen } \vartheta}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} = \\
& \left[\frac{2\underline{x}}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} - \frac{\text{sen } \vartheta (\underline{y}\cos \vartheta - \underline{x}\text{sen } \vartheta)}{(1-\underline{x}^2-\underline{y}^2)^2} \right] \cdot \left[(\underline{x}-2\underline{\dot{y}})^2 + (\underline{y}+2\underline{\dot{x}})^2 \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{4.174}$$

As expressões (4.172) e (4.173) são análogas às expressões (4.91) e (4.92) desenvolvidas no item 4.2 do capítulo anterior, cujas igualdades foram demonstradas. Resta agora o estabelecimento das relações de igualdade para a expressão (4.174):

$$\begin{aligned}
& -\frac{(\underline{x} - 2\dot{\underline{y}})2\underline{x} \cos \vartheta}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} + \frac{(\underline{x} - 2\dot{\underline{y}})2\underline{y} \sin \vartheta}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} - \frac{(\underline{y} + 2\dot{\underline{x}})4\underline{x} \sin \vartheta}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} + \frac{(\underline{y} + 2\dot{\underline{x}})\underline{y} \cos \vartheta}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} - \frac{(\underline{y} + 2\dot{\underline{x}})\underline{x} \sin \vartheta}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} = \\
& \left[\frac{2\underline{x}}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} - \frac{\sin \vartheta (\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta)}{(1 - \underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2} \right] \cdot \left[(\underline{x} - 2\dot{\underline{y}})^2 + (\underline{y} + 2\dot{\underline{x}})^2 \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{4.175}$$

A expressão acima tem alguns termos análogos cujas igualdades foram provadas para o mancal cilíndrico. Trabalhando-se os denominadores:

$$\begin{aligned}
& \left[-(\underline{x} - 2\dot{\underline{y}})2\underline{x} \cos \vartheta + (\underline{x} - 2\dot{\underline{y}})2\underline{y} \sin \vartheta - (\underline{y} + 2\dot{\underline{x}})4\underline{x} \sin \vartheta + (\underline{y} + 2\dot{\underline{x}})\underline{y} \cos \vartheta - (\underline{y} + 2\dot{\underline{x}})\underline{x} \sin \vartheta \right] = \\
& \left[2\underline{x} - \sin \vartheta (\underline{y} \cos \vartheta - \underline{x} \sin \vartheta) \right] \cdot \left[(\underline{x} - 2\dot{\underline{y}})\underline{y} - (\underline{y} + 2\dot{\underline{x}})\underline{x} \right]
\end{aligned}
\tag{4.176}$$

$$\begin{aligned}
& (\underline{x} - 2\dot{\underline{y}})2\underline{y} \sin \vartheta - (\underline{y} + 2\dot{\underline{x}})4\underline{x} \sin \vartheta - (\underline{x} - 2\dot{\underline{y}})2\underline{x} \cos \vartheta = - \left[(\underline{x} - 2\dot{\underline{y}})^2 + (\underline{y} - 2\dot{\underline{x}})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot [2\underline{x}] \\
& (\underline{x} - 2\dot{\underline{y}})2\underline{y} \sin \vartheta - (\underline{y} + 2\dot{\underline{x}})2\underline{x} \sin \vartheta - (\underline{y} + 2\dot{\underline{x}})2\underline{x} \sin \vartheta + \\
& -(\underline{x} - 2\dot{\underline{y}})2\underline{x} \cos \vartheta = - \left[(\underline{x} - 2\dot{\underline{y}})^2 + (\underline{y} - 2\dot{\underline{x}})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot [2\underline{x}]
\end{aligned}
\tag{4.177}$$

Lembrando-se a Figura 3.7 e as relações (4.95), estabelece-se uma função análoga àquela válida para os mancais cilíndricos: $(\underline{x} - 2\dot{\underline{y}}) \sin \vartheta = (\underline{y} + 2\dot{\underline{x}}) \cos \vartheta$. A seguir, faz-se o mesmo para a relação:

$$(\underline{x} - 2\dot{\underline{y}})\underline{y} = (\underline{y} + 2\dot{\underline{x}})\underline{x}
\tag{4.178}$$

Substituindo-se a expressão (4.178) na relação (4.177)

$$-\left[(\underline{y} + 2\underline{\dot{x}})2x \sin \vartheta + (\underline{x} - 2\underline{\dot{y}})2x \cos \vartheta\right] = -\left[(\underline{x} - 2\underline{\dot{y}})^2 + (\underline{y} + 2\underline{\dot{x}})^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot (2\underline{x}) \quad (4.179)$$

A solução para a verificação da igualdade nas expressões anteriores é análoga ao já desenvolvido para os mancais cilíndricos, como pode ser verificado. Com relação à componente da força hidrodinâmica não-linear na direção \mathbf{y} , também se repete o procedimento.

Da igualdade (4.179), valida-se a igualdade das expressões (4.174) e, conseqüentemente, as componentes \mathbf{F}_x da força hidrodinâmica dadas por (4.160) e (4.170).

Portanto, é válida a representação matemática para as forças fluidodinâmicas não-lineares através das expressões (4.136).

5 DESCRIÇÃO DO SISTEMA ANALISADO

5.1 Introdução

No capítulo 3, apresentou-se o problema estudado. Como descrito, o objetivo é aplicar dois modelos matemáticos, desenvolvidos para representar as forças fluidodinâmicas não-lineares exercidas pelo filme de óleo lubrificante nos mancais hidrodinâmicos, no estudo do comportamento dinâmico de um modelo matemático de máquina rotativa vertical.

O comportamento dinâmico das máquinas rotativas que utilizam mancais hidrodinâmicos depende muito dos efeitos de amortecimento e rigidez inerentes ao fluido lubrificante, que sustenta o rotor em movimento [8] [15] [37].

A fim de estudar este comportamento das máquinas rotativas, a Dinâmica de Rotores faz uso de técnica de modelamento matemático dos sistemas físicos envolvidos. Através dos modelos matemáticos realizam-se simulações numéricas do comportamento dinâmico de equipamentos, mesmo antes de seu projeto definitivo, visando-se conhecer suas principais características dinâmicas, tais como: frequências naturais, instabilidades e amplitudes de vibração lateral do rotor, consideradas as mais significativas [18].

O presente estudo visa avaliar a influência do modelo de filme de óleo na simulação numérica do comportamento de uma máquina rotativa vertical, interligada à estrutura de montagem, inicialmente por um mancal hidrodinâmico cilíndrico e, a seguir, por um mancal do tipo segmentado. A análise será realizada no Capítulo 6, em função das órbitas descritas pelo centro do rotor com relação ao centro do mancal.

Assim, este capítulo traz a descrição das principais características físicas dos modelos matemáticos envolvidos na simulação numérica desta representação de máquina rotativa de rotor flexível vertical, como visto no Capítulo 3.

5.2 Esquema do Rotor

Como já mencionado, a palavra rotor é a denominação utilizada para descrever o eixo e todos os elementos à ele acoplados, como discos, acionadores, pás, selos, mancais e outros. No caso em estudo, propõe-se um modelo matemático que represente um rotor flexível vertical, acionado por um conjunto Motor-Acionador acoplado à sua parte superior, um disco rígido acoplado à sua parte inferior. O eixo é interligado à estrutura de montagem, considerada rígida, por meio de um mancal hidrodinâmico. A Figura 5.1 ilustra o esquema representativo do rotor e dos elementos à ele acoplados.

Considera-se um rotor flexível de aço carbono, seção circular uniforme e constante, simétrica e com densidade de massa por unidade de comprimento uniformemente distribuída (ρ). Suas dimensões são mostradas na Figura 5.2. Os dados e parâmetros físicos foram retirados de trabalhos anteriores realizados em máquinas rotativas [14] [30] [1], cujos valores são mostrados na Tabela 5.1.

O conjunto Motor-Acionador é conectado à estrutura de montagem por meio de molas e considerado rígido. É representado através das propriedades de um disco rígido concentrado acoplado. São considerados os efeitos giroscópicos inerentes ao movimento. Possui um mancal suporte, também considerado rígido.

O disco rígido acoplado à extremidade inferior é considerado maciço, de seção constante. Sua representação no modelo é feita através de uma massa concentrada num ponto do rotor, cujos efeitos inerciais e giroscópicos também são considerados.

Uma força de excitação devida ao desbalanceamento distribuído ao longo do eixo age sobre o rotor. No caso em estudo, esta força age no mesmo ponto onde podem estar representadas as propriedades concentradas do disco, na extremidade inferior do rotor.

O mancal hidrodinâmico é modelado pela força hidrodinâmica não-linear exercida pelo filme de óleo existente entre o rotor e sua superfície interna, que age sobre o rotor. Este ponto de conexão entre o rotor e a estrutura de montagem está rigidamente ligado à esta, de modo a não influenciar os efeitos de amortecimento e rigidez inerentes ao filme de óleo.

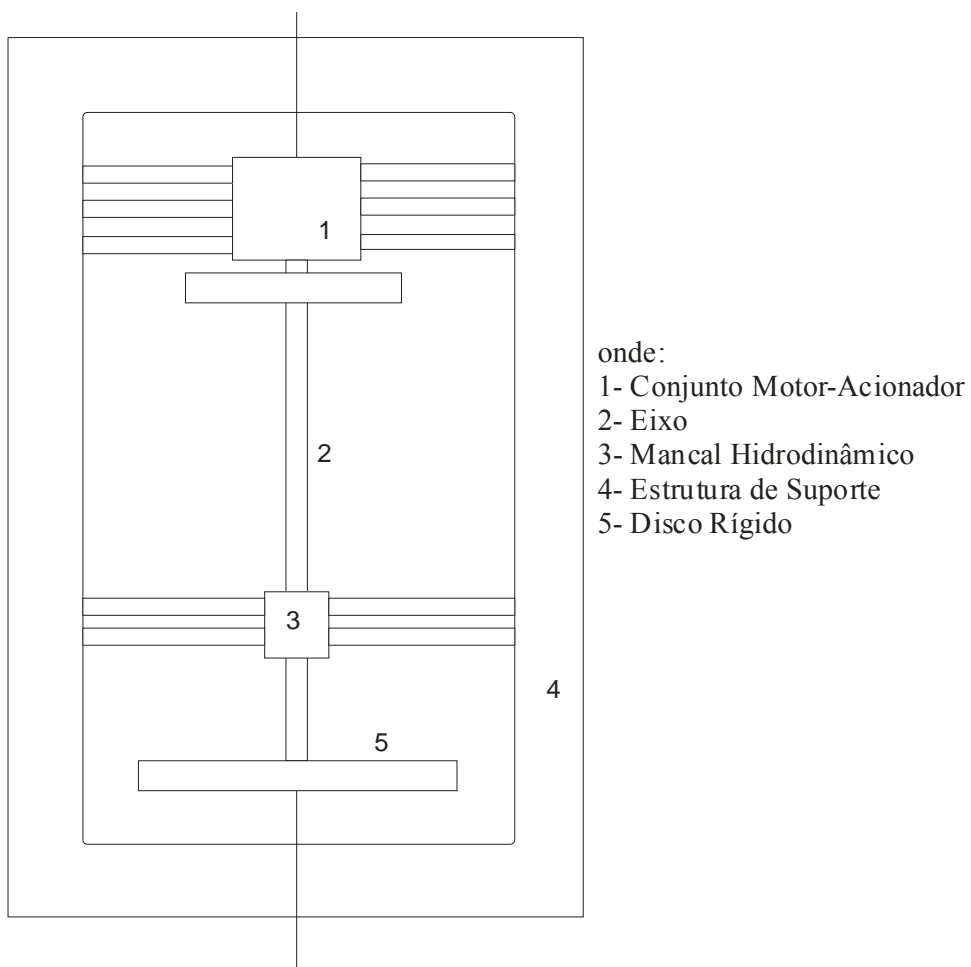


Figura 5.1: Esquema representativo do Rotor montado em Estrutura de Suporte

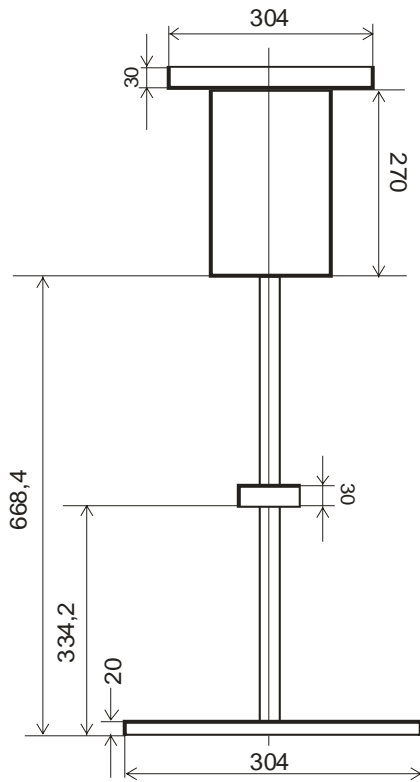


Figura 5.2: Principais dimensões para o modelo de rotor vertical. Medidas em [mm].

As forças hidrodinâmicas não-lineares, dependentes da posição e velocidade do centro do rotor com relação ao centro do mancal, são consideradas no modelo pela inclusão do termo $\{f_o\}$ do lado direito da equação matricial global de movimento, que rege o sistema dinâmico, dada pela expressão **(3.1)**:

$$[M]\ddot{q}(t) + [C]\dot{q}(t) + [K]q(t) = \{f_o\} + \{f_e\}$$

Não são consideradas outras forças externas atuando sobre o sistema, tais como magnéticas ou aerodinâmicas, também não são considerados demais elementos como selos de fluxo ou outros.

5.3 Modelo por Elementos Finitos

5.3.1 Introdução

No item anterior foram apresentadas as características físicas utilizadas no modelo matemático do rotor e os elementos à ele acoplados. A seguir será mostrado o procedimento utilizado para descrever matematicamente os fenômenos físicos envolvidos no movimento do sistema, partindo-se do conhecimento de seus parâmetros.

As forças hidrodinâmicas não-lineares que o filme de óleo dos mancais desenvolve, agem sobre o rotor em seu ponto de conexão com a estrutura de montagem. Estas forças, somadas àquelas causadas pelos desbalanceamentos de massa, distribuídos ao longo do eixo, resultam numa vibração do tipo flexural. Quando rotor é colocado em movimento de rotação, há uma deflexão de seu eixo com relação ao sistema de referência O_{xyz} (Figura 5.3).

A análise do comportamento dinâmico é feita com base nas amplitudes dos deslocamentos em x e y ao longo do rotor. Nesta subseção, o rotor é entendido como sendo a estrutura composta pelo eixo flexível de seção transversal circular com massa uniformemente distribuída ao longo do comprimento, bem como elementos de discos rígidos e acionadores.

O método utilizado para estimar os deslocamentos em alguns pontos de interesse de uma estrutura como o rotor vertical é o Método dos Elementos Finitos [3]. Para aplicar este método o rotor é dividido em um número conveniente de elementos cujas conexões, entre eles são denominadas pontos nodais ou nós. O eixo, por exemplo, é dividido em seis elementos do tipo viga e sete nós. A deflexão completa da estrutura será expressa em função dos deslocamentos nodais de cada elemento.

Neste método, os coeficientes dinâmicos do modelo são obtidos à partir das energias envolvidas no sistema. A matriz de massa do sistema é obtida a partir da expressão da energia cinética. A matriz de rigidez tem origem na expressão da energia potencial de deformação.

A seguir são descritas as principais características do modelo por elementos finitos, elaborado para representar o sistema rotativo estudado. O desenvolvimento a partir das equações

de energia envolvidas no movimento não é objetivo deste trabalho. Serão apresentadas somente as matrizes empregadas na modelagem do conjunto [25].

A equação matricial global que descreverá o movimento do sistema dinâmico completo é obtida pela superposição das matrizes desenvolvidas para cada elemento separadamente.

A Figura 5.4 mostra o rotor, em repouso, discretizado em elementos de viga, discos rígidos, molas e amortecedores, e situado num sistema cartesiano de referência \mathbf{O}_{xyz} . Neste sistema de referência fixa, o eixo z coincide com o eixo de rotação do rotor e tem a direção coincidente com a do vetor velocidade de rotação $\vec{\omega}$.

O conjunto Motor-Acionador será considerado como um disco rígido, com efeito giroscópico, acoplado ao rotor como coeficiente de rigidez e amortecimento no nó 1.

O mancal hidrodinâmico está localizado no nó 4. Este nó está rigidamente interligado à estrutura de montagem para evitar influências da rigidez da estrutura sobre os efeitos de rigidez e amortecimento produzidos pelo filme de óleo lubrificante do mancal.

O nó 7, na extremidade inferior do modelo de rotor, tem conectado um disco rígido, cujas características encontram-se na Tabela 5.1. A inércia do disco produz efeitos giroscópicos no rotor [25].

Entre os nós 1 e 7 existem seis elementos de viga, idênticos em dimensões, que interligados formam o eixo. A Tabela 5.2 mostra as especificações dos elementos.

O conhecimento das amplitudes dos deslocamentos flexurais no nó onde agem as forças hidrodinâmicas é de grande interesse, visto haver neste ponto a limitação dada pela folga radial do mancal. Choques entre as superfícies do rotor e do mancal podem causar elevadas perdas para as máquinas rotativas [18].

Cada nó do modelo pode deslocar-se de \mathbf{u} e \mathbf{v} nas direções dos eixos \mathbf{x} e \mathbf{y} , e girar respectivamente ao redor deles com ângulos θ e ϕ , conferindo a cada nó da estrutura 4 graus de liberdade. A Figura 5.5 ilustra o esquema do modelo por elementos finitos do rotor e seus respectivos graus de liberdade por nó.

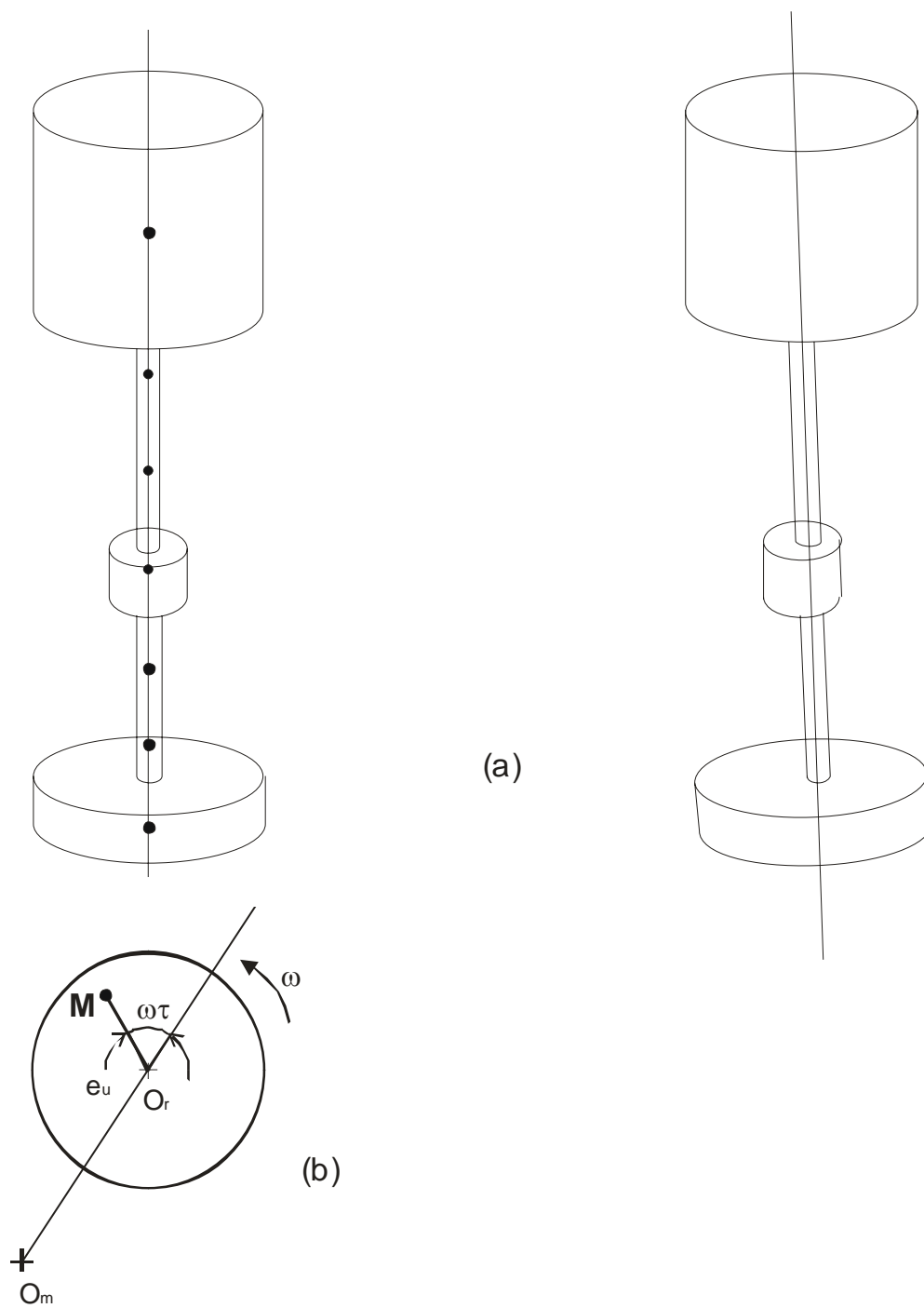


Figura 5.3: Esquema representativo do modelo do Rotor por Elementos Finitos. (a) Vista Espacial (b) Vista No Plano

Tabela 5.1: Distribuição de Elementos por nós do Modelo de Rotor

Nó(s)	Tipo De Elemento	Dimensões (mm)	Material
1	Disco Rígido	(\varnothing 304 x 30) + (\varnothing 195x 270)	Aço Carbono
4	Mancal Hidrodinâmico	\varnothing 40	Aço Carbono
7	Disco Rígido	\varnothing 304 x 20	Aço Carbono
1,2	Viga	\varnothing 20 x 111,4	Aço Carbono
2,3	Viga	\varnothing 20 x 111,4	Aço Carbono
3,4	Viga	\varnothing 20 x 111,4	Aço Carbono
4,5	Viga	\varnothing 20 x 111,4	Aço Carbono
5,6	Viga	\varnothing 20 x 111,4	Aço Carbono
6,7	Viga	\varnothing 20 x 111,4	Aço Carbono

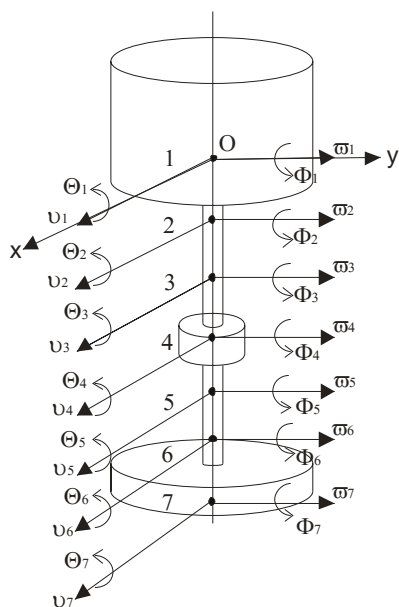


Figura 5.4. Esquema do modelo por Elementos Finitos para Rotor Vertical e seus Deslocamentos Nodais.

Tabela 5.2: Descrição das características físicas dos Elementos que compõem o Rotor e seus respectivos nós.

	Elemento do Modelo	Valor	Unidade
Motor-Acionador Disco=1, nó=1	Massa do conjunto	80,0	[kg]
	Momento de Inércia de massa em x	0,878484	[kg.m ²]
	Momento de Inércia de massa em y	0,878484	[kg.m ²]
	Momento de Inércia de massa em z	0,12	[kg.m ²]
Elementos Viga nós=1,7	Massa Específica	$7,8 \times 10^3$	[kg/m ³]
	Módulos de Young	$2,067 \times 10^{11}$	[N/m ²]
	Diâmetro	$20,0 \times 10^{-3}$	[m]
	Momento de Inércia de área em x	$0,78226 \times 10^{-8}$	[m ⁴]
	Momento de Inércia de área em y	$0,78226 \times 10^{-8}$	[m ⁴]
	Momento de Inércia de área em z	$1,5645 \times 10^{-8}$	[m ⁴]
Disco Rígido Inferior Disco=2, nó=7	Massa	11,375	[kg]
	Momento de Inércia de massa em x	0,06218	[kg.m ²]
	Momento de Inércia de massa em y	0,06218	[kg.m ²]
	Momento de Inércia de massa em z	0,1	[kg.m ²]
Mancal Hidrodinâmico nó=4	Massa	1,0	[kg.m ²]
	Momento de Inércia de massa em x	0,01	[kg.m ²]
	Momento de Inércia de massa em y	0,01	[kg.m ²]
	Momento de Inércia de massa em z	0,02	[kg.m ²]
Mola de Conexão 1 nó=1 - Motor-Acionador	Rigidez- direção x	$2,47 \times 10^5$	[N/m]
	Rigidez- direção y	$3,16 \times 10^5$	[N/m]
Mola de Conexão 2 nó=1 - Motor-Acionador	Rigidez- direção x	$2,94 \times 10^5$	[N/m]
	Rigidez- direção y	$2,86 \times 10^5$	[N/m]
Mola de Conexão 3 nó=4 - Mancal	Rigidez- direção x	$2,84 \times 10^5$	[N/m]
	Rigidez- direção y	$2,91 \times 10^5$	[N/m]

A seguir, uma breve descrição matemática dos elementos que compõem o rotor.

5.3.2 Elemento Viga

O rotor é dividido em seis elementos tipo viga de Timoshenko [25][30]. Cada elemento tem comprimento l_i igual à 1/6 do comprimento total do rotor. A Figura 5.5 mostra um elemento viga simplificado e seus graus de liberdade.

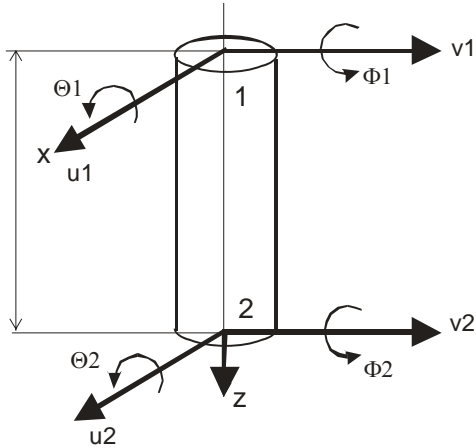


Figura 5.5: Esquema representativo de um Elemento Viga.

O elemento mostrado tem oito graus de liberdade e o vetor do deslocamento nodal é dado por:

$$q_{1,2}^T = [u_1, \theta_1, v_1, \phi_1, u_2, \theta_2, v_2, \phi_2]^T \quad (5.1)$$

onde o índice **T** indica que a matriz é transposta.

A matriz de massa **[M]** do elemento de viga, derivada da expressão da energia cinética E_c , é dada por:

$$[M] = \frac{\rho S l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22l & 54 & 0 & 0 & 13l \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 0 & 54 & -13l & 0 \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 0 & 13l & -3l^2 & 0 \\ -22l & 0 & 0 & 4l^2 & -13l & 0 & 0 & -3l^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13l & 156 & 0 & 0 & 22l \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 0 & 156 & -22l & 0 \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 0 & -22l & 4l^2 & 0 \\ 13l & 0 & 0 & -3l^2 & 22l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

A matriz das inércias de massa $[M_s]$ do elemento viga é dada por:

$$[M_s] = \frac{\rho I}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & 4l^2 & 3l & 0 & 0 & -l^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & -l^2 & 3l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

E a matriz giroscópica $[G]$ é dada por:

$$[G] = \frac{\rho l \omega}{15l} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l \\ 3l & 0 & 0 & -4l^2 & -3l & 0 & 0 & l^2 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l \\ 3l & 0 & 0 & l^2 & -3l & 0 & 0 & -4l^2 \\ 0 & 3l & l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Apresenta-se agora, a matriz de rigidez do elemento viga, derivada da aplicação das equações de Lagrange na expressão da energia potencial [25]. Não são considerados os efeitos de torção, mas sim os efeitos de cisalhamento interno.

\mathbf{K}_c ...Matriz de rigidez do elemento viga do rotor devido à flexão

$$a = \frac{12EI}{GS_r l^2} \quad (5.5)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

\mathbf{a} e \mathbf{G} são os efeitos de cisalhamento

$$K_c = \frac{EI}{(1+a)l^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6l & -12 & 0 & 0 & -6l \\ 0 & 12 & 6l & 0 & 0 & -12 & 6l & 0 \\ 0 & 6l & (4+a)l^2 & 0 & 0 & -6l & (2-a)l^2 & 0 \\ -6l & 0 & 0 & (4+a)l^2 & 6l & 0 & 0 & (2-a)l^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6l & 12 & 0 & 0 & 6l \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 0 & 12 & -6l & 0 \\ 0 & 6l & (2-a)l^2 & 0 & 0 & -6l & (4+a)l^2 & 0 \\ -6l & 0 & 0 & (2-a)l^2 & 6l & 0 & 0 & (4+a)l^2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

5.3.3 Elemento Disco Rígido

Os elementos de disco acoplados ao rotor têm quatro graus de liberdade. Os deslocamentos e as rotações do disco são descritas pelo vetor deslocamento:

$$\mathbf{q}^T = [u, \theta, v, \phi]^T \quad (5.7)$$

A aplicação das Equações de Lagrange em relação à energia cinética envolvida no momento do disco fornece [25]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial q} = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{v} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dz} \\ 0 & 0 & I_{Dz} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

onde: M_DMassa do disco rígido

I_{Dx}Momento de inércia em relação ao eixo x.

I_{Dy}Momento de inércia em relação ao eixo y

I_{Dz}Momento de inércia em relação ao eixo z

A primeira matriz do lado direito da equação (5.8) é a matriz de massa clássica para o elemento disco, e a segunda é a matriz dos efeitos giroscópicos, dependentes da velocidade. Os termos derivados da energia potencial de deformação não comparecem, naturalmente, para elementos rígidos [25].

5.3.4 Elemento Mancal

O comportamento dinâmico do rotor depende muito dos efeitos de rigidez e amortecimento desenvolvidos no filme de óleo lubrificante no interior do mancal hidrodinâmico. Como já mencionado, as forças hidrodinâmicas não lineares, dependentes da posição e velocidade de um ponto do eixo, serão incluídas na equação matricial global de movimento (3.1) juntamente com a força excitadora de desbalanceamento.

As forças hidrodinâmicas não-lineares $\{f_o\}$ do filme de óleo, calculadas pelos modelos matemáticos dos mancais, são incluídas nas equações de movimento do modelo de rotor através das componentes nas direções **x** e **y**, aplicadas no nó 4. As forças atuam sobre o rotor, no nó do mancal, e são consideradas como fonte de excitação para seu movimento flexural.

As componentes $\{f_{x_o}\}$ e $\{f_{y_o}\}$ contribuem, na equação de movimento, com a excitação na forma:

$$q^T = \{x1\theta1y1\phi1x2\theta2y2\phi2x3\theta3y3\phi3x4\theta4y4\phi4x5\theta5y5\phi5x6\theta6y6\phi6x7\theta7y7\phi7\}^T \quad (5.9)$$

e

$$\{f_o\} = \{00000000000000f_{x_o}0f_{x_o}00000000000000\}^T \quad (5.10)$$

A Figura 5.6 mostra uma representação simplificada das forças do filme de óleo e seu ponto de atuação no rotor.

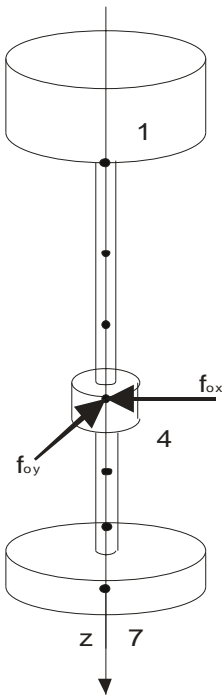


Figura 5.6: Representação do nó de atuação das componentes das forças do filme de óleo.

Este elemento é representado no modelo como uma massa e uma inércia rigidamente acopladas à estrutura de montagem. Os dados referentes à construção dos mancais estão mostrados na Tabela 5.1 e suas características estão detalhadas na seção seguinte.

5.4 Esquema dos Mancais Analisados

5.4.1 Mancal Cilíndrico

O modelo matemático que representa a força hidrodinâmica não-linear que o fluido lubrificante exerce sobre o rotor, deduzido na seção 4.2, aplica-se para o mancal cilíndrico plano. Este tipo de mancal é o de geometria mais simples. É classificado como sendo de “geometria fixa”. Sua construção não apresenta maiores complicações.

Esta força não linear é obtida através da equação da distribuição de pressão no interior do mancal, dada pela Equação de Reynolds (3.2). A obtenção da força considera os parâmetros geométricos do mancal, seja através da função de espessura do filme de óleo (\bar{h}), na equação 3.2; das hipóteses sobre a relação (**K**) entre raio (**R**) e comprimento (**L**) e do ângulo de trabalho α . A relação **K** também pode ser expressa em função do comprimento (**L**) e do diâmetro (**D**).

A solução da equação (3.2) depende de considerações sobre o fluxo do lubrificante no interior do mancal. O modelo deduzido considera a hipótese que mancal é do tipo “curto”, onde $K = \frac{R}{L} \geq 1$ ou $\frac{L}{D} \leq \frac{1}{2}$, desprezando-se o gradiente circunferencial de pressão com relação ao gradiente axial [9][10].

O mancal cilíndrico está entre os mais utilizados em máquinas rotativas quando não há a necessidade de operação em elevadas rotações nem altas cargas aplicadas sobre o rotor, sendo apropriado, nestes casos, a utilização de mancais hidrodinâmicos do tipo segmentado. Apresentam também, para certos sistemas rotativos, características de instabilidades do movimento lateral de vibração do rotor, devido ao fenômeno observado em 1925 por **Newkirk** [32] [2] [37] e denominado de “*Oil Whirl*”.

A Figura 5.7 ilustra o esquema representativo do modelo matemático do mancal cilíndrico plano e sua geometria. O modelo de mancal está localizado no nó número 4 do modelo matemático do rotor. Na montagem da equação de movimento do rotor, o modelo de mancal

contribui com sua massa e suas inércias, além, das forças não-lineares do filme de óleo que estão incluídas no lado direito da equação (3.1).

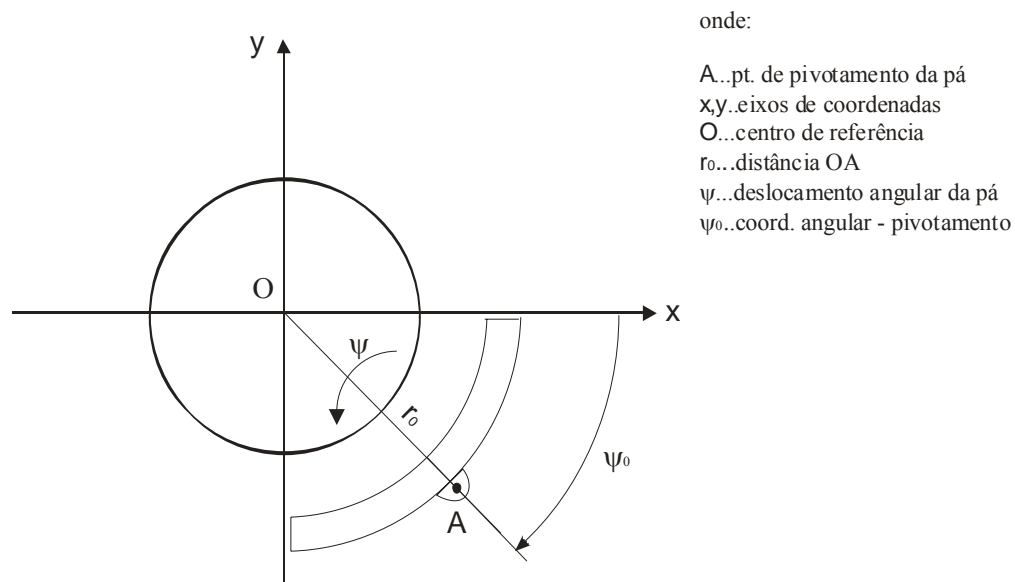


Figura 5.7 Esquema representativo do Modelo de Mancal Cilíndrico e sua geometria.

A Tabela 5.3 mostra as dimensões físicas e demais características para o modelo de mancal cilíndrico.

Tabela 5.3: Especificações do Modelo de Mancal Cilíndrico.

Material	Aço Carbono
Massa	1,0 Kg
Localização	Nó 4
Momento inércia eixo x	0,01 (kg.m ²)
Momento inércia eixo y	0,01(kg.m ²)
Momento inércia eixo z	0,02(kg.m ²)
Diâmetro	40,0 mm
Comprimento	20,0 mm
Folga Radial	100µm

5.4.2 Mancal Segmentado

O modelo matemático que representa a força hidrodinâmica não-linear que o fluido lubrificante exerce sobre o rotor, deduzido na seção 4.3, aplica-se para o mancal segmentado. Este tipo de mancal não possui uma geometria simples. É classificado como sendo de "geometria móvel". Sua construção depende muito das características de operação da máquina rotativa.

Para este tipo de mancal, a obtenção da força não-linear, também dada pela solução da Equação de Reynolds (3.2) é feita para cada uma das pás do mancal. A força não-linear total que atua sobre o rotor será dada pela soma vetorial das componentes nas direções x e y de cada pá. A Figura 5.8 ilustra o esquema representativo do modelo matemático do mancal segmentado de três pás e sua geometria.

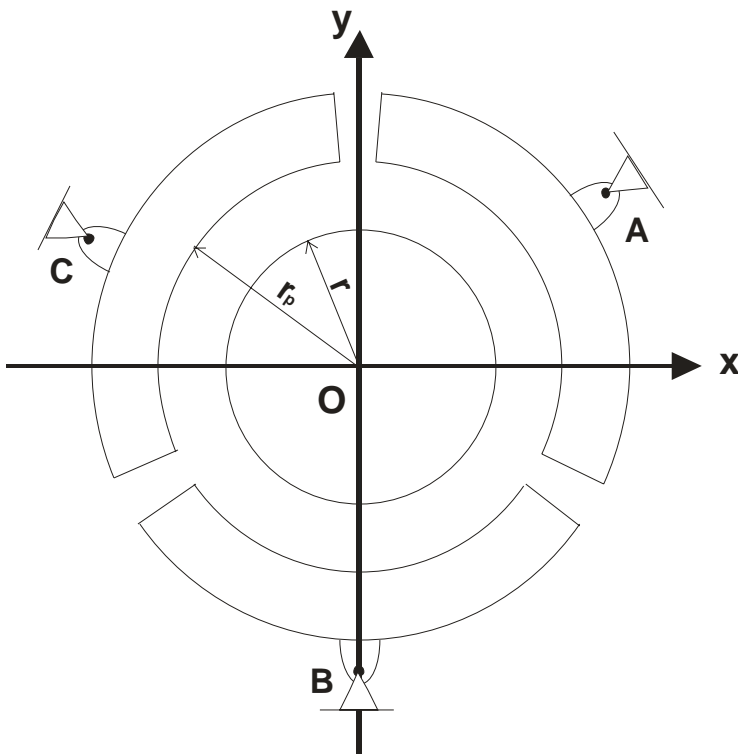


Figura 5.8. Esquema representativo do Modelo de um Mancal Segmentado de três pás e sua geometria.

A influência da geometria dos mancais segmentados sobre estas forças não-lineares é ainda maior que no caso dos mancais tipo cilíndrico plano. Além da função espessura do filme de óleo (\bar{h}') equação (3.2) e da relação $\frac{R}{L}$, existem outros parâmetros geométricos a se considerar, como os ângulos \mathcal{G}_i , iniciais e finais, para cada pá, os ângulos ψ_i dos pontos de fixação, e os ψ de giro das pás sobre seus pontos de fixação **A**, **B** e **C**.

A solução da equação (3.2) depende de considerações sobre o fluxo do lubrificante no interior do mancal. O modelo deduzido também considera a hipótese que o mancal é do tipo "curto" onde $k = \frac{R}{L} \geq 1$ ou $\frac{L}{D} \leq \frac{1}{2}$, desprezando-se o gradiente circunferencial de pressão com relação ao gradiente axial [9] [10].

Este tipo de mancal foi desenvolvido simultaneamente por dois pesquisadores diferentes, **Mitchell** e **Kingsbury**, entre o final do século passado e o início deste [32]. Tem larga utilização em máquinas rotativas, cujas velocidades de rotação do eixo e as cargas aplicadas são elevadas. As pás do mancal podem girar em torno de suas fixações, tendendo a ajustar o perfil das pressões internas causadas pelo filme de óleo, eliminando, assim, os termos cruzados e acoplados de rigidez e amortecimento do filme, estabilizando o movimento de vibração lateral do rotor, e eliminando o efeito “**Oil Whirl**” [2] [10] [12] [18].

O mancal segmentado modelado possui pás móveis com pivotamento central, o que permite sua utilização para ambos os sentidos de rotação impostos ao rotor: horário e anti-horário.

A Tabela 5.4 mostra as dimensões físicas e outras características do modelo de mancal cilíndrico.

Tabela 5.4: Especificações para o Modelo de Mancal Segmentado de três pás.

Material	Aço Carbono
Massa	1,0 Kg
Localização	Nó 4
Momento de Inércia Eixo X	0,01 (kg.m ²)
Momento de Inércia Eixo Y	0,01(kg.m ²)
Momento de Inércia Eixo Z	0,02(kg.m ²)
Diâmetro	40,0 mm
Comprimento	20,0 mm
Folga Radial	100,0
Número de Pás	3
Ângulos de Fixação ψ_0, ψ_1, ψ_2	90 ⁰ , 210 ⁰ , 330 ⁰
Ângulos Iniciais $\vartheta_1, \vartheta_3, \vartheta_5$	-25 ⁰ , 95 ⁰ , 215 ⁰
Ângulos Finais $\vartheta_2, \vartheta_4, \vartheta_6$	85 ⁰ , 205 ⁰ , 325 ⁰

5.5 Filme de Óleo

Quando uma máquina rotativa é colocada em movimento, os desbalanceamentos existentes no rotor provocam um deslocamento de seu centro com relação ao centro do mancal. A velocidade de rotação imposta ao rotor cria um perfil de velocidades relativas ao longo da espessura do filme de lubrificante, induzindo um cisalhamento viscoso.

Esta excentricidade cria um efeito de cunha convergente e divergente entre as superfícies do rotor e do mancal. O fluido lubrificante é puxado pelo cisalhamento viscoso para a cunha convergente, aumentando sua pressão, enquanto que na cunha divergente, a pressão decresce.

Neste estudo considera-se que os efeitos da tensão de cisalhamento sejam os principais e a viscosidade do fluido seja o parâmetro mais importante. O fluido lubrificante usado é um óleo com viscosidade $0,1985 \times 10^{-1}$ [N.s/m²]. Para o fluido assumem-se as seguintes suposições:

- A viscosidade e a temperatura mantêm-se constantes.
- O escoamento é laminar.
- Os efeitos de inércia do filme são desprezados.

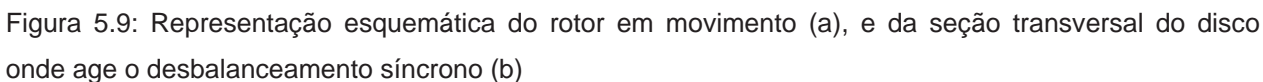
Assim, foram descritos os elementos que são utilizados nas simulações numéricas dos modelos realizadas no próximo capítulo.

5.6 Força de Desbalanceamento.

O desbalanceamento de massas rotativo é a fonte mais comum de vibração em máquinas rotativas [37]. A distribuição não-uniforme da massa ao longo do eixo é inevitável dada a condição anisotrópica do aço. Esta distribuição pode ser imaginada como uma seqüência de infinitas seções circulares do eixo, cada uma com um centro de massa \mathbf{cm}_i deslocado de \mathbf{e}_u do seu centro geométrico \mathbf{Or}_i . Como não é possível solucionar as equações de movimento infinitas vezes, o efeito do desbalanceamento será estudado, no modelo, por uma representação de uma massa excêntrica \mathbf{M} que se assume localizada no nó do disco rígido inferior (7).

O deslocamento \mathbf{e}_u é chamado de excentricidade de desbalanceamento e o desbalanceamento efetivo \mathbf{U} do disco é dado pelo produto da sua massa \mathbf{M} e da excentricidade \mathbf{e}_u . O deslocamento da massa \mathbf{M} do disco provoca um desbalanço centrífugo no eixo no ponto \mathbf{Or} , que forçará uma órbita do eixo ao redor da linha de centro do mancal \mathbf{Or} , com raio igual à deflexão do eixo e velocidade angular ω [rd/s]. Este movimento é chamado de precessão síncrona circular [18].

A Figura 5.9 (a) mostra o rotor em movimento com velocidade de rotação ω e a deformação de sua linha elástica relacionada ao sistema de referência \mathbf{Oxyz} . A Figura 5.9(b) mostra a seção transversal do disco.


$$\{f_e\} = \begin{Bmatrix} f_{ex} \\ f_{ey} \end{Bmatrix} = M.\omega^2 e_u \begin{Bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$
$$q^T = \{x1\theta1y1\phi1x2\theta2y2\phi2x3\theta3y3\phi3x4\theta4y4\phi4x5\theta5y5\phi5x6\theta6y6\phi6x7\theta7y7\phi7\}^T$$
$$\{f_e\} = \left\{0000000000000000000000000000 f_{ex} 0 f_{ey} 0\right\}^T$$

Outros tipos de desbalanceamentos, como os causados por desalinhamentos dos acoplamentos por exemplo, não são considerados neste trabalho. Uma representação simplificada das forças de desbalanceamento agindo sobre o rotor é mostrada na Figura 5.10.

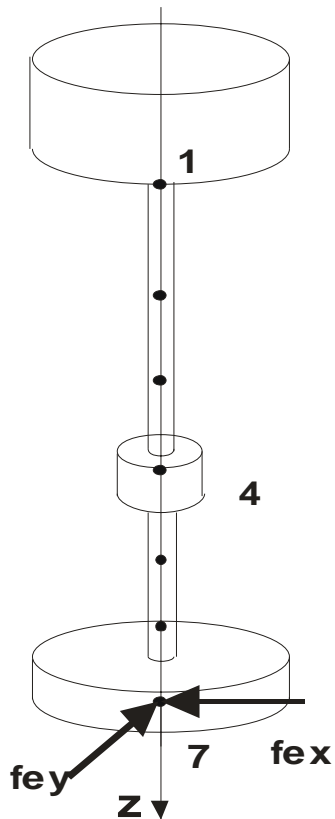


Figura 5.10: Representação esquemática do nó de atuação das componentes da força de desbalanceamento.

6 SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS OBTIDOS

6.1 Introdução

Neste capítulo é feita uma análise do comportamento dinâmico do modelo matemático de uma máquina rotativa vertical, descrito no capítulo anterior.

Quando o rotor é colocado em movimento de rotação com velocidade ω , as forças devidas ao desbalanceamento das massas excêntricas distribuídas ao longo de seu comprimento forçam-no à uma deflexão em sua linha elástica.

No projeto de uma máquina rotativa, como o modelo analisado, há um grande interesse no conhecimento prévio das amplitudes dos deslocamentos do rotor em seu estado deformado, em relação à sua linha neutra original quando em repouso [37].

Uma justificativa para tornar viável uma simulação numérica de modelos antes de seu projeto definitivo pode ser, por exemplo, o conhecimento das amplitudes dos deslocamentos do eixo do rotor no nó onde está localizado o Mancal Hidrodinâmico. Neste ponto, que está rigidamente ligado à estrutura de montagem, há uma limitação física aos deslocamentos do centro **O**r do rotor, dada pela diferença entre seu raio, **r**, e o raio do mancal **R**, chamada de folga radial, **C**. A Figura 6.1 ilustra a situação.

Grandes danos podem ser evitados se as amplitudes do movimento de vibração do rotor durante toda a operação da máquina forem mantidos dentro da folga radial, onde atua o filme de lubrificante, impedindo toques e choques entre rotor e mancal [18].

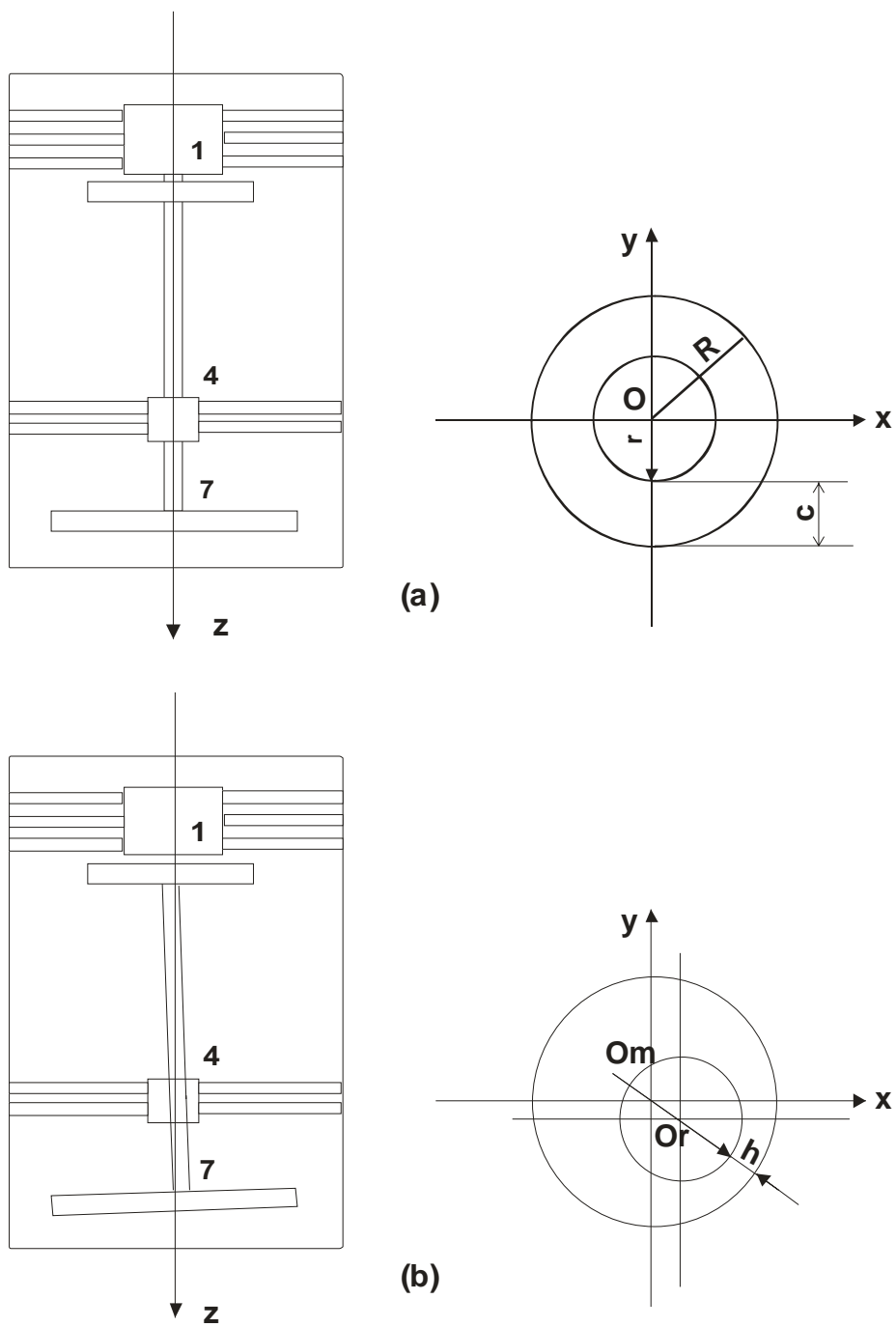


Figura 6.1 - Representação esquemática do modelo de rotor e sua seção transversal no nó 4 - Mancal Cilíndrico

(a) sistema em repouso, eixo centrado. (b) sistema em movimento

Neste trabalho, o comportamento dinâmico do modelo de rotor flexível vertical é estudado considerando-se a excitação do movimento vibratório flexural devido ao desbalanceamento, dado pelo vetor $\{f_e\}$, e às forças hidrodinâmicas não-lineares $\{f_o\}$, presentes no lado direito da equação (3.1):

Nas simulações numéricas realizadas, o maior interesse é a amplitude dos deslocamentos no nó 4 do modelo. Neste nó estão localizados os modelos não-lineares para os mancais hidrodinâmicos. Nesta simulação são obtidas as trajetórias descritas pelo centro do eixo **Or** com relação ao centro do mancal **Om**, fixo no sistema de referência **Oxyz**. As trajetórias, em função do tempo (t), também são chamadas de “Órbitas”.

As órbitas são plotadas graficamente através dos deslocamentos dados pelos vetores posição nas direções **x** e **y** do centro do mancal. Os deslocamentos são obtidos da solução da equação (3.1).

A equação matricial global de movimento do sistema dinâmico, fazendo-se uso de certas características especiais das matrizes coeficientes **[M]** **[K]** e **[C]**, pode ser resolvida empregando-se um método de integração direto baseado num procedimento “passo a passo”, onde não são necessárias transformações prévias na equação [3].

As idéias básicas do procedimento são: tentar satisfazer o equilíbrio na equação (3.1) somente em intervalos de tempo discretos Δt , e não em qualquer tempo t , assumindo uma variação dos deslocamentos, velocidades e acelerações dentro de cada intervalo Δt . Consideram-se como conhecidos os vetores deslocamento, velocidade e aceleração no tempo t igual a zero.

O procedimento “passo a passo” utilizado neste trabalho é o método de integração implícito de Newmark, que utiliza as condições de equilíbrio no tempo $(t + \Delta t)$, como empregado em [10][15], e detalhado em **BATHE et al.**[3].

Neste procedimento a equação de movimento passa a considerar o tempo $(t + \Delta t)$ e pode ser reescrita como:

$$[M]\ddot{q}(t + \Delta t) + [C]\dot{q}(t + \Delta t) + [K]q(t + \Delta t) = F(t + \Delta t) \quad (6.1)$$

O vetor das forças que agem sobre o rotor, $F(t+\Delta t)$, é a soma das componentes das forças de desbalanceamento mais as do filme de lubrificante, avaliado no instante seguinte. O procedimento de **Newmark** utiliza as seguintes suposições [3]:

$$\dot{q}(t + \Delta t) = \dot{q}(t) + [(1 - \delta)\ddot{q}(t) + \delta\ddot{q}(t + \Delta t)]\Delta t \quad (6.2)$$

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \dot{q}(t)\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{q}(t) + \alpha\ddot{q}(t + \Delta t) \right] \Delta t^2 \quad (6.3)$$

onde α e δ são os parâmetros envolvidos com a estabilidade e precisão da integração numérica.

A princípio, obtém-se uma relação que expresse a aceleração $\ddot{q}(t + \Delta t)$ em função do deslocamento $q(t + \Delta t)$, partindo-se de (6.3). A seguir, substitui-se esta aceleração na equação (6.2), obtendo uma relação onde a velocidade $\dot{q}(t + \Delta t)$ também possa ser expressa em função do deslocamento $q(t + \Delta t)$.

Desta maneira o deslocamento $q(t + \Delta t)$, que é desconhecido, pode ser avaliado pela substituição tanto de $\ddot{q}(t + \Delta t)$ quanto de $\dot{q}(t + \Delta t)$ na equação (6.1). Em seguida, pelo uso das relações (6.2) e (6.3) também são estimados $\ddot{q}(t + \Delta t)$ e $\dot{q}(t + \Delta t)$. O algoritmo completo utilizando o método de integração de Newmark (**BATHE et al.** [3]) é descrito como:

I- Cálculos Iniciais

I.1- Formar as matrizes $[M]$, $[K]$ e $[C]$

I.2- Inicializar $q(0), \dot{q}(0)$ e $\ddot{q}(0)$

I.3- Selecionar passo ou intervalo de tempo Δt , bem como δ e α e calcular as constantes de integração:

$$\delta \geq 0.50 \quad \alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1; a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); a_6 = \Delta t(1 - \delta); a_7 = \delta \Delta t$$

I.4- Formar a matriz efetiva de rigidez $\hat{k} : \hat{k} = [K] + a_0[M] + a_1[C]$

I.5- Triangularizar $\hat{k} : \hat{k} = LDL^T$

II- Para cada passo no tempo:

II.1- Calcular cargas efetivas no tempo $(t + \Delta t)$

$$\hat{F}(t + \Delta t) = F(t + \Delta t) + [M][a_0 q(t) + a_2 \dot{q}(t) + a_3 \ddot{q}(t)] + [C][a_1 q(t) + a_4 \dot{q}(t) + a_5 \ddot{q}(t)]$$

II.2- Resolver para deslocamentos no tempo $(t + \Delta t)$:

$$LDL^T q(t + \Delta t) = \hat{F}(t + \Delta t)$$

II.3- Calcular acelerações e velocidades no tempo $(t + \Delta t)$:

$$\ddot{q}(t + \Delta t) = a_0[q(t + \Delta t) - q(t)] - a_2 \dot{q}(t) - a_3 \ddot{q}(t)$$

$$\dot{q}(t + \Delta t) = \dot{q}(t) + a_6 \ddot{q}(t) + a_7 \ddot{q}(t + \Delta t)$$

Para simular, então, o modelo matemático proposto de máquina rotativa vertical, foi utilizado dois programas. O primeiro, simula as órbitas, nas coordenadas **x** e **y** do sistema de referências **Oxyz**, para o modelo matemático de rotor flexível vertical que está interligado à estrutura de montagem por meio de um mancal cilíndrico plano. O segundo simula as mesmas órbitas, porém com o emprego do modelo deduzido de mancal segmentado. Ambos utilizam o método de **Newmark** para a solução numérica das equações de movimento do sistema.

A partir destas simulações serão analisados os comportamentos dinâmicos destes dois distintos modelos de mancais hidrodinâmicos.

6.2 Resposta em Frequência

6.2.1 Modos Próprios do Rotor

O modelo matemático estudado, como ocorre nas máquinas rotativas em geral, têm propriedades distribuídas, tais como massa e rigidez. Esses sistemas possuem um infinito número de graus de liberdade para vibrar, e podem ser completamente descritos apenas quando os movimentos forem conhecidos para cada um de todos os seus pontos.

No caso em estudo, as distribuições de massa e rigidez são altamente não-uniformes, como nos elementos discos e eixos, possibilitando a construção de um modelo matemático discreto, o qual necessita somente de um número finito de parâmetros para descrever as propriedades de massa e rigidez equivalentes. Desta maneira, os sistemas com um número infinito de graus de liberdade são reduzidos à sistemas com apenas um número finito deles [28].

Como descrito no capítulo anterior, o modelo proposto de rotor, montado pelo método dos elementos finitos, possui 7 nós e 4 graus de liberdade por nó, totalizando então 28 graus de liberdade.

As frequências naturais discretizadas de um sistema dinâmico estão associadas a sua forma e a seu modo próprio de vibrar. Este modo próprio de vibrar pode ser pensado como uma “fotografia” da curva de deflexão do rotor num instante de deformação máxima durante a vibração [37].

Quando alguma das frequências naturais do rotor for excitada, como por exemplo pelo desbalanceamento rotativo, girando à velocidade de rotação do eixo, a velocidade do eixo que coincide com a frequência natural é chamada “velocidade crítica” [37].

Os modos próprios de vibrar do rotor são determinados pela distribuição da massa e da rigidez dos suportes dos mancais. Matematicamente falando, os modos próprios do rotor são dados pelos auto-vetores associados aos auto-valores dados pela solução da equação de movimento do sistema.

O modelo proposto de rotor vertical flexível considera um movimento orbital do centro do rotor relacionado ao centro do mancal. O mancal e o conjunto Motor-Acionador estão ligados à estrutura por meio de molas muito rígidas. Como as molas impedem o movimento do suporte, o eixo do rotor é forçado, pelo desbalanceamento síncrono, a curvar-se e orbitar em torno da linha de centro da máquina.

No estudo do comportamento dinâmico de rotores verticais pode-se admitir que o movimento do centro do rotor \mathbf{O}_r possa partir do centro do mancal \mathbf{O}_m , visto que não se considera a força peso na direção da gravidade, como no caso de mancais que suportam rotores de posicionamento horizontal.

Nesta simulação, a fim de avaliar as amplitudes dos deslocamentos nas direções \mathbf{x} e \mathbf{y} do rotor no nó do mancal, foram integradas as equações de movimento dos sistemas dinâmicos (mancais cilíndrico e segmentado) pelo procedimento de Newmark exposto na subseção anterior.

Os parâmetros utilizados para a integração foram:

*Tempo = 2,4 [s]

*Número de passos=120.000

*intervalo de tempo de cada passo= $2,0 \times 10^{-5}$

* $\delta=0.5$

* $\alpha=0.5$

*momento de desbalanceamento= $1,0 \times 10^{-5}$

*número de nós do modelo=7

*número de elementos=9

*graus de liberdade por nó=4

Geralmente, em aplicações deste tipo, as velocidades de operação dos rotores situam-se entre a primeira e a segunda velocidades críticas [8][32].

As velocidades críticas dos modelos de rotores são avaliadas a partir de uma condição chamada Quase-Estático, onde foram plotadas as amplitudes das órbitas para diversas rotações diferentes do eixo. Assim foram obtidos os “mapas” das amplitudes de vibração de “**whirl**”

avaliadas no mancal, causadas por desbalanceamentos, conforme VANCE [37], considerando-se também a excitação das forças do filme de lubrificante.

A Figura 6.2 mostra a representação do modo de vibrar associado à primeira velocidade crítica para um rotor tipo “cantilever” para disco rígido e rotor horizontal, extraída de [37].

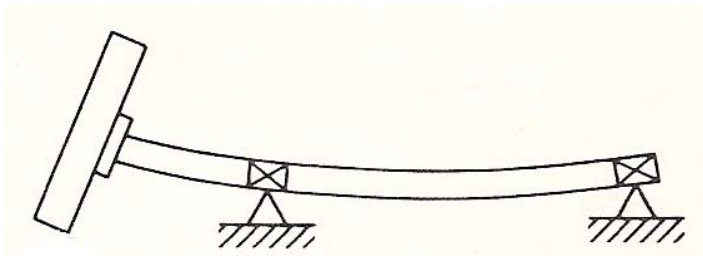


Figura 6.2: Representação do modo de vibrar de rotor horizontal, extraída de VANCE [37]

6.2.2 Análise dos Casos Estudados

A avaliação das velocidades críticas do modelo proposto de rotor, através de uma varredura das amplitudes dos deslocamentos pelas velocidades de rotação, foi realizada para cada tipo de mancal. O sistema foi avaliado num nó próximo ao conjunto Motor-Acionador, (nó 2), bem como nos nós de fixação dos mancais (4) e do disco rígido (7). As forças não-lineares do filme de fluido lubrificante do sistema dinâmico são simuladas para diferentes velocidades de rotação do eixo. O objeto de interesse é o nó 4, onde será avaliada a amplitude de cada órbita obtida para comparação com a folga radial do mancal.

6.2.2.1 Modelo de Rotor com Mancal Cilíndrico

As velocidades críticas do modelo de rotor flexível vertical com mancal hidrodinâmico cilíndrico são uma aproximação obtida pela solução da equação de movimento do sistema para velocidades de rotação numa faixa de 0 a 160 [rd/s], com intervalos de 10 [rd/s]. As amplitudes representam o raio da órbita dado pela raiz quadrada da soma dos quadrados dos deslocamentos nas direções x e y . Como condições iniciais para cada rotação foram adotados os deslocamentos

dados como resultados de saída da simulação para rotação anterior realizada. Assim a simulação para 20 [rad/s], por exemplo, utiliza os valores de $x(10)$ e $y(10)$ como condições iniciais.

Este procedimento foi realizado para os nós 2, 4 e 7 do modelo de rotor, visando o conhecimento aproximado do “perfil” das amplitudes das órbitas relacionado às diferentes velocidades de rotação do modelo proposto.

A Figura 6.3 mostra a resposta do nó 4 de mancal com a velocidade de rotação do eixo ω variando até 80 [rd/s]. Uma primeira análise da figura revela um pico situado em torno de 40 [rd/s] e, a seguir, uma elevação de amplitude na faixa logo após 60 [rd/s].

O primeiro pico em 40 [rd/s] é identificado como a primeira velocidade crítica do sistema rotativo. Uma análise da resposta do sistema no nó 2 do modelo, no eixo do rotor, foi simulada até 160 [rd/s]. A Figura 6.4 mostra a resposta do nó 2 do elemento viga, com a velocidade de rotação variando até 160 [rd/s]. Nesta figura percebe-se também que a primeira velocidade crítica do sistema está em torno de 40 [rd/s].

A resposta da Figura 6.4 para a velocidade de 80 [rd/s] difere da resposta da Figura 6.3. Uma análise mais profunda deste caso é efetuada na subseção 6.3.4 a seguir.

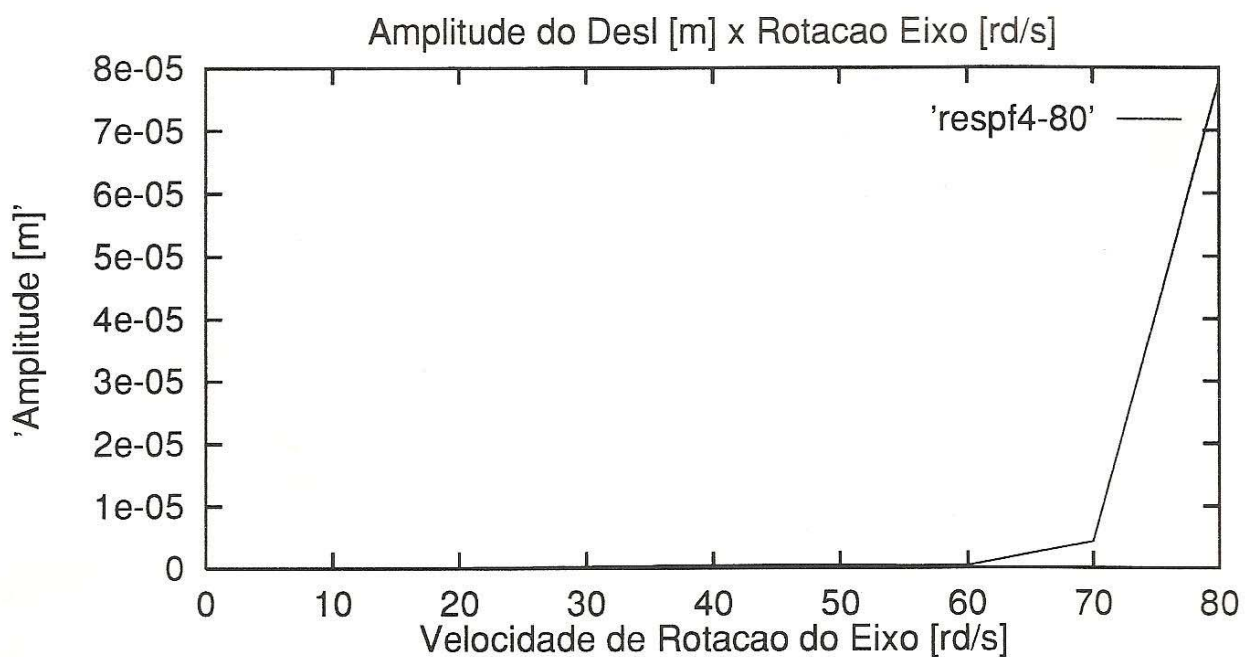


Figura 6.3: Amplitude do deslocamento - mancal cilíndrico, nó=4

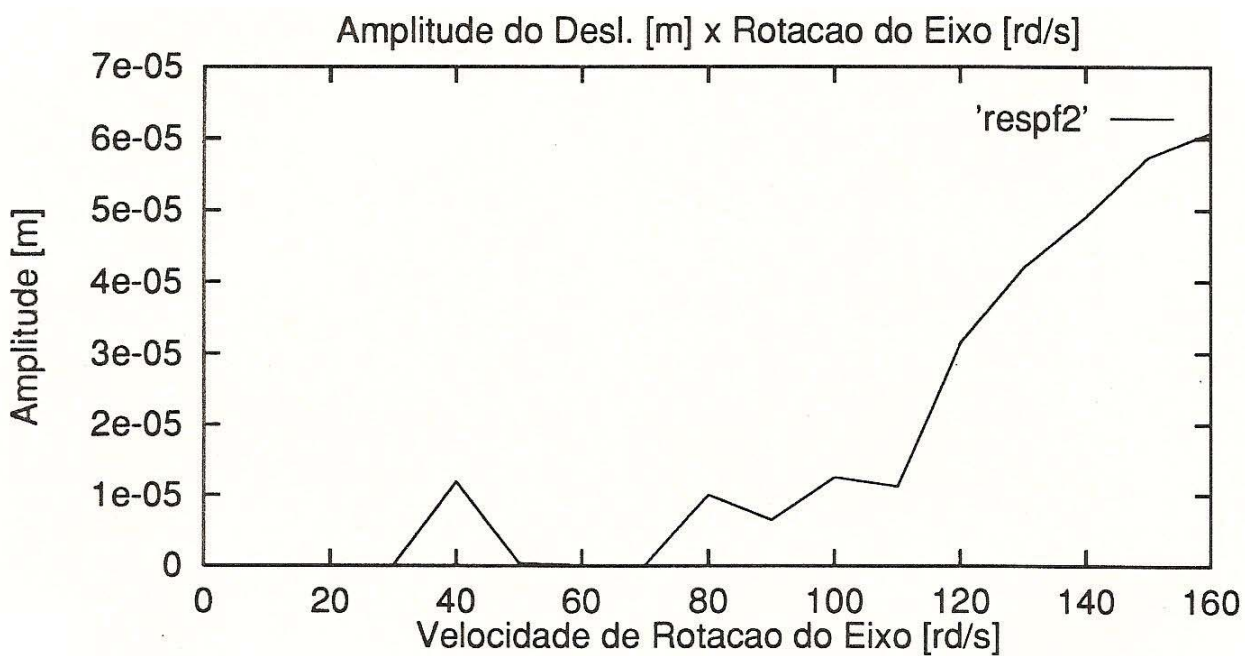


Figura 6.4: Amplitude do deslocamento - mancal cilíndrico, nó=2

Sabe-se então, que a primeira velocidade crítica do modelo proposto de rotor que considera as forças não-lineares do filme de lubrificante do mancal, para a montagem com o mancal hidrodinâmico tipo cilíndrico é de aproximadamente 40 [rd/s] ou 6,37 [Hz].

6.2.2.2 Modelo de Rotor com Mancal Segmentado

As velocidades críticas do modelo de rotor flexível vertical com mancal segmentado são uma aproximação obtida pela solução numérica para as equações de movimento do sistema para velocidades de rotação numa faixa entre 0 e 250 [rd/s] ou 39.8 [Hz]. A metodologia usada é a mesma descrita para o estudo do mancal cilíndrico, na subseção anterior.

Este procedimento foi usado para o conhecimento do perfil das amplitudes dos deslocamentos somente no interior do mancal, relacionadas às diferentes velocidades de rotação.

A Figura 6.5 mostra a resposta do eixo com sua velocidade de rotação variando até 200 [rd/s]. Numa rápida análise da figura, visualiza-se o pico característico da primeira velocidade crítica, como no caso do mancal cilíndrico anteriormente analisado, porém com uma diferença acentuada: a ordem de grandeza das amplitudes. Na Figura 6.3 observa-se uma amplitude de cerca de $5,0 \cdot 10^{-07}$ para a rotação a 40 [rd/s] no mancal cilíndrico, enquanto que no segmentado (Figura 6.5) este valor é de aproximadamente $1,0 \cdot 10^{-06}$ à mesma velocidade de rotação.

A mesma Figura 6.5 mostra ainda que, para o mancal segmentado, acima de 80 [rd/s], as amplitudes decrescem com o aumento da rotação até aproximadamente 130 [rd/s]. Uma análise mais profunda deste caso é efetuada na subseção 6.4.4 à seguir.

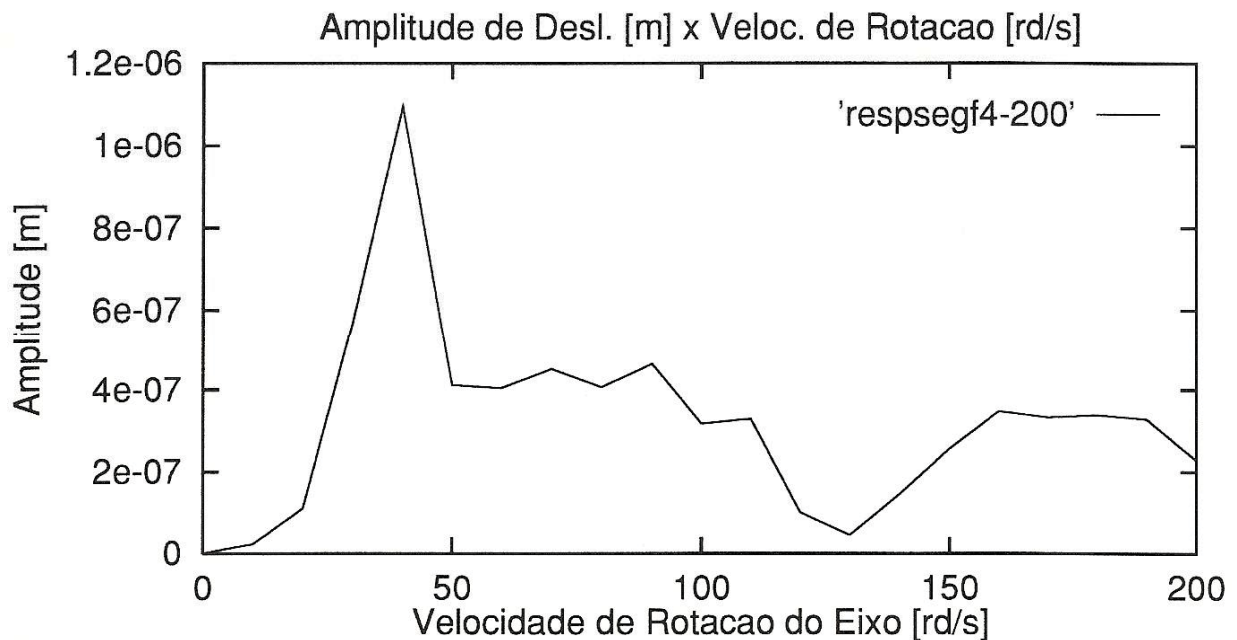


Figura 6.5: Amplitude do deslocamento - mancal segmentado, nó=4

6.3 Resultados para Mancal Cilíndrico

6.3.1 Efeito do Desbalanceamento a 100 [rd/s]

A fonte mais comum de vibração nas máquinas rotativas é o desbalanceamento das massas excêntricas do rotor [37]. Nesta subseção é efetuada uma análise da amplitude da órbita descrita pelo centro do rotor no interior do mancal tipo cilíndrico. A velocidade de rotação do eixo é de 100 [rd/s], situada acima da primeira velocidade crítica do sistema, ou seja, de 40 [rd/s].

Na primeira simulação, o sistema é analisado para os efeitos de um momento de desbalanceamento de $1,0 \cdot 10^{-5}$ [kg.m] agindo sobre o rotor no nó 7, onde se localiza o disco rígido inferior. As Figuras 6.6 (a), (b) e (c), mostram respectivamente o deslocamento em função do tempo nas direções **x** e **y** e a órbita **x-y**.

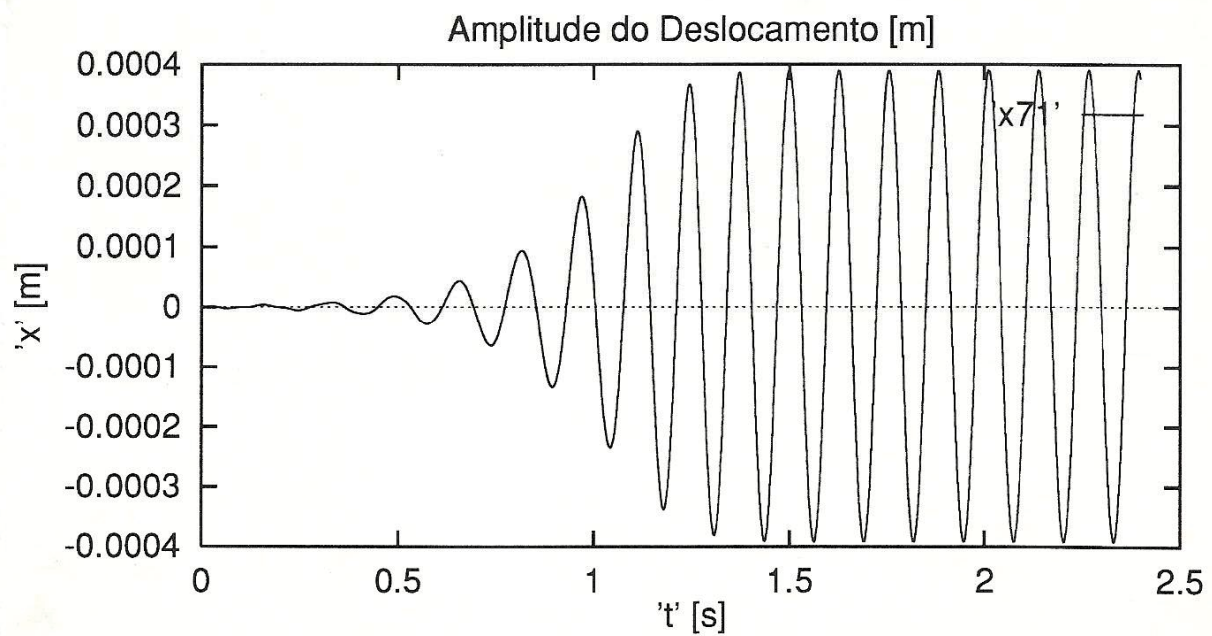


Figura 6.6: (a) Deslocamento em x

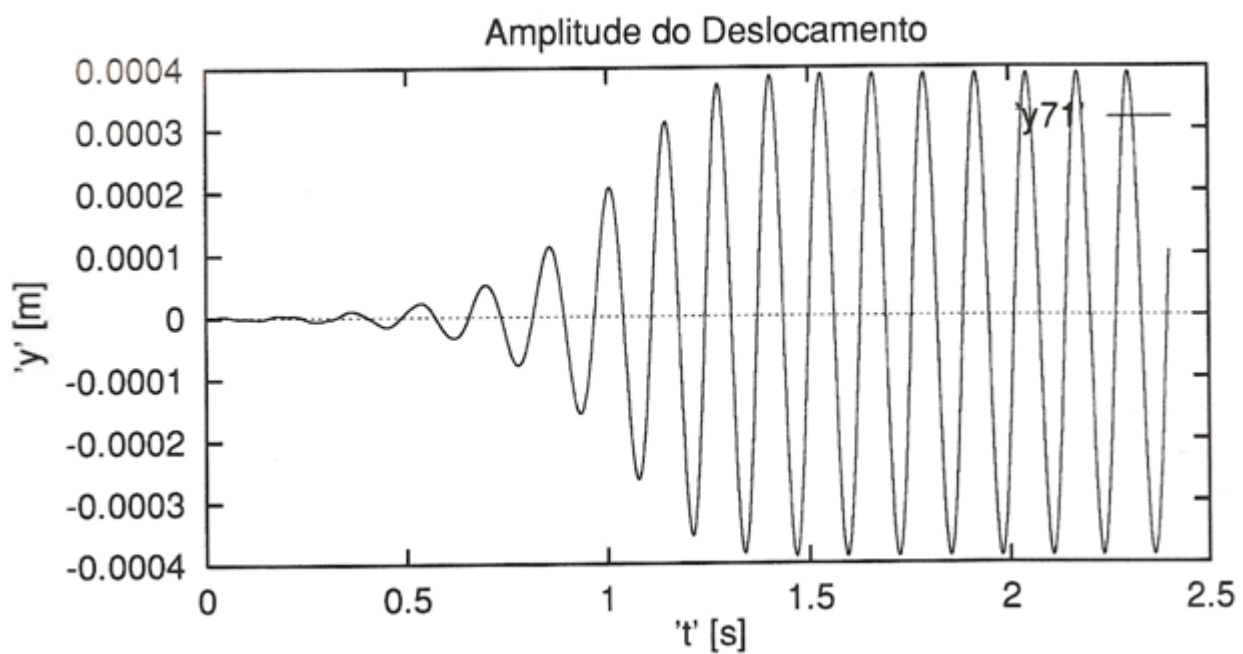


Figura 6.6: (b) Deslocamento em y

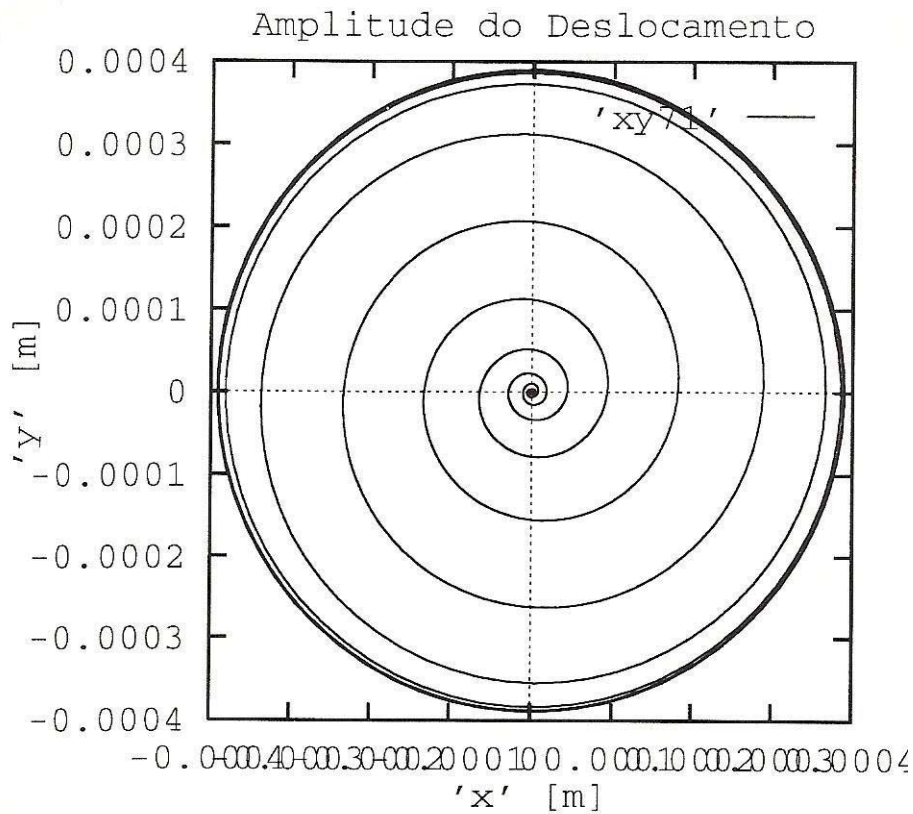


Figura 6.6: (c) Amplitude do Deslocamento x Rotação (nó=7; $U=1,0 \cdot 10^{-5}$)

A seguir o sistema é simulado para um desbalanceamento, aplicado no mesmo nó, sendo porém dez vezes maior que o anterior. O momento de desbalanceamento de $1,0 \cdot 10^{-4}$ [kg.m] provoca uma alteração na força excitadora do movimento e a resposta do sistema pode ser visualizada nas Figuras 6.7 (a), (b) e (c), abaixo.

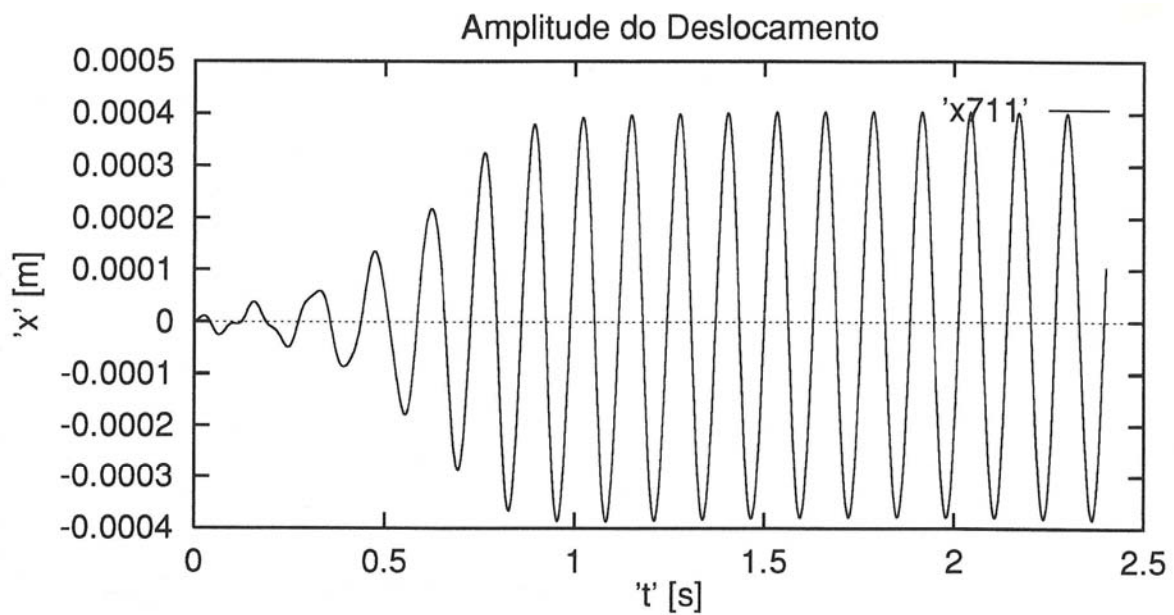


Figura 6.7: (a) Deslocamento em x

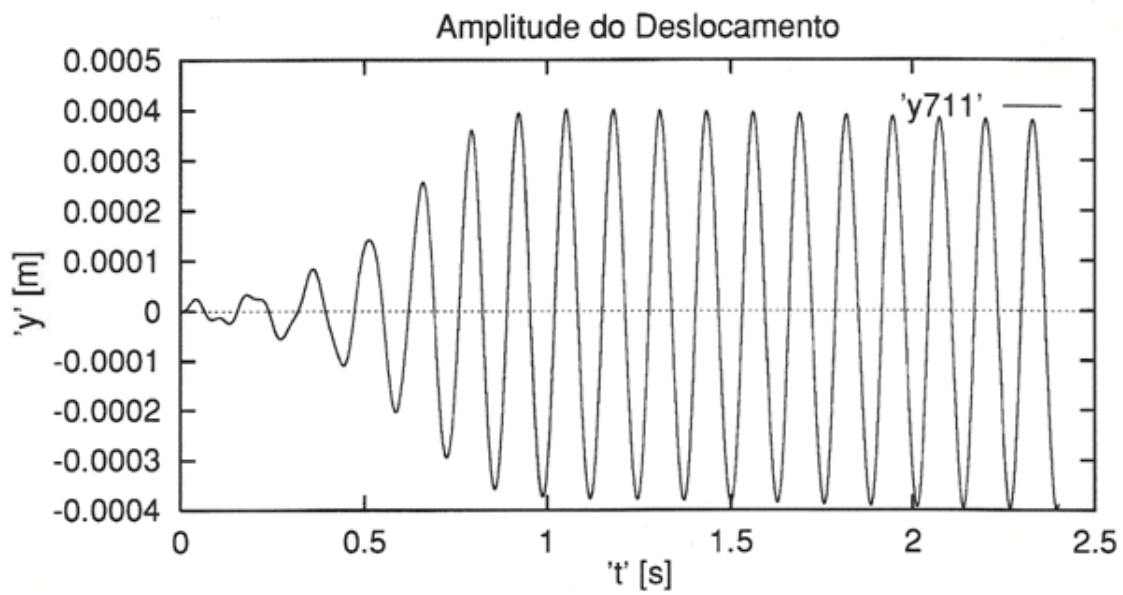


Figura 6.7: (b) Deslocamento em y

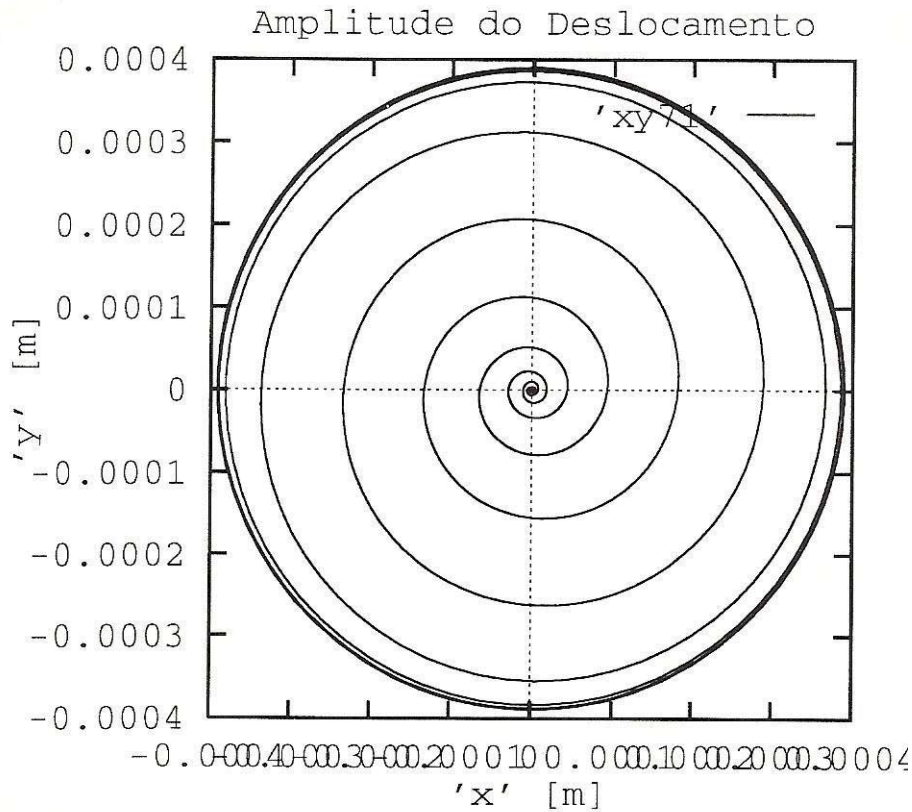


Figura 6.7: (c) Amplitude do Deslocamento x Rotação (nó=7; $U=1,0 \cdot 10^{-4}$)

Pode-se perceber que o sistema com a maior força de desbalanceamento aplicada responde mais rapidamente à excitação. As amplitudes apresentadas para as órbitas são as mesmas para ambos os casos e estão limitadas pelo ciclo limite em aproximadamente $8,0 \cdot 10^{-5}$. A principal diferença é o tempo necessário para que o movimento alcance o ciclo limite de amplitude, devido aos efeitos não-lineares de amortecimento presentes no filme de fluido lubrificante, como o descrito em [18][37].

6.3.2 Efeito da Posição de Partida

As máquinas rotativas verticais não têm uma posição preferencial de partida. Nas máquinas horizontais esta posição de partida é definida por uma força estática devida ao peso próprio do rotor, agindo na direção da força de gravidade sobre o fluido lubrificante, ainda estático. A ação do peso do rotor faz com que parte do volume do fluido lubrificante do mancal retorne para o reservatório de alimentação, de modo que apenas uma pequena camada do lubrificante esteja presente no início do movimento [4][8][37].

As simulações realizadas até agora consideram sempre a condição de partida do rotor centrado, em relação ao sistema de referência \mathbf{O}_{xyz} , com $\mathbf{O}_m = \mathbf{O}_r = \mathbf{O}$. A seguir mostra-se o resultado obtido para a simulação do modelo proposto de rotor com mancal cilíndrico, supondo-se que o rotor esteja inclinado, ou descentrado no nó 1. O rotor está centrado no nó 4 do mancal e sua órbita será avaliada neste ponto.

A Figura 6.8 ilustra a órbita descrita pelo rotor em função do efeito da posição de partida do movimento. Embora haja uma perturbação no início do movimento, percebe-se que a 100 [rd/s] as amplitudes tendem ao mesmo ciclo-limite das simulações anteriores, em diferentes condições.

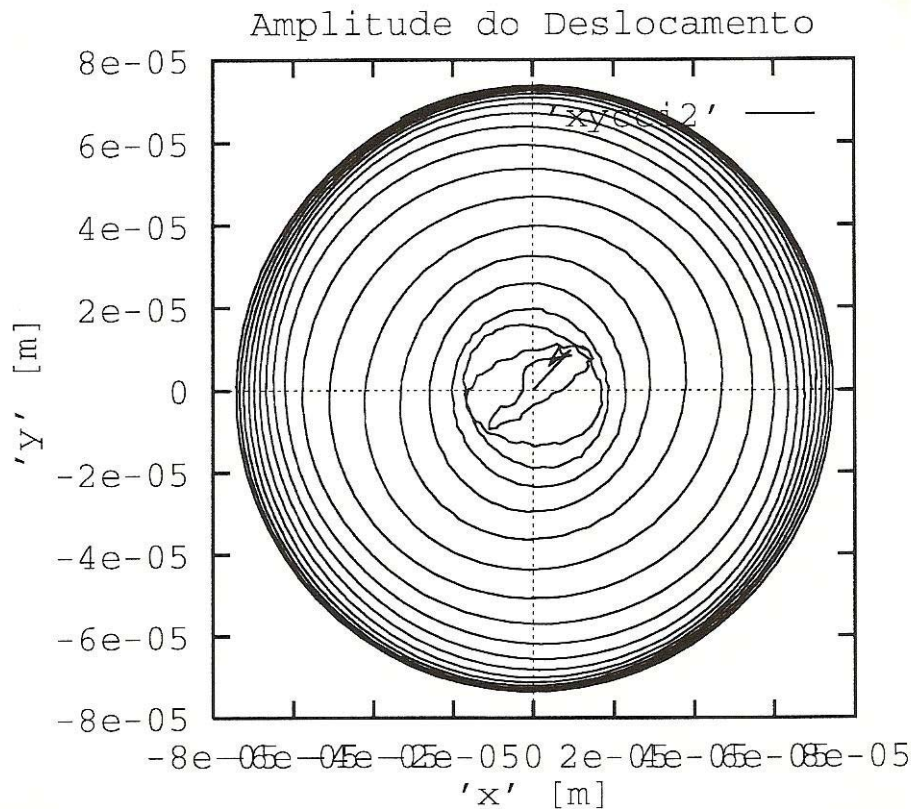


Figura 6.8: Órbita descrita pelo rotor partindo da posição apoiada no nó 1 e centrado no nó 4.

6.3.3 Comportamento à Diversas Velocidades Partindo do Repouso

A seguir são mostrados os resultados obtidos para as simulações das respostas do rotor com mancal cilíndrico, em diferentes velocidades de rotação ω , partindo sempre da posição centrada e do repouso ($\omega=0$).

A Figura 6.9 mostra a órbita **x-y** do centro do rotor no nó do mancal cilíndrico (4). O momento de desbalanceamento é de $1,0 \cdot 10^{-5}$ aplicado ao nó 7. A velocidade de rotação nesta simulação é de 10 [rd/s] e os parâmetros para a integração numérica da equação de movimento são os mesmos definidos no início da seção.

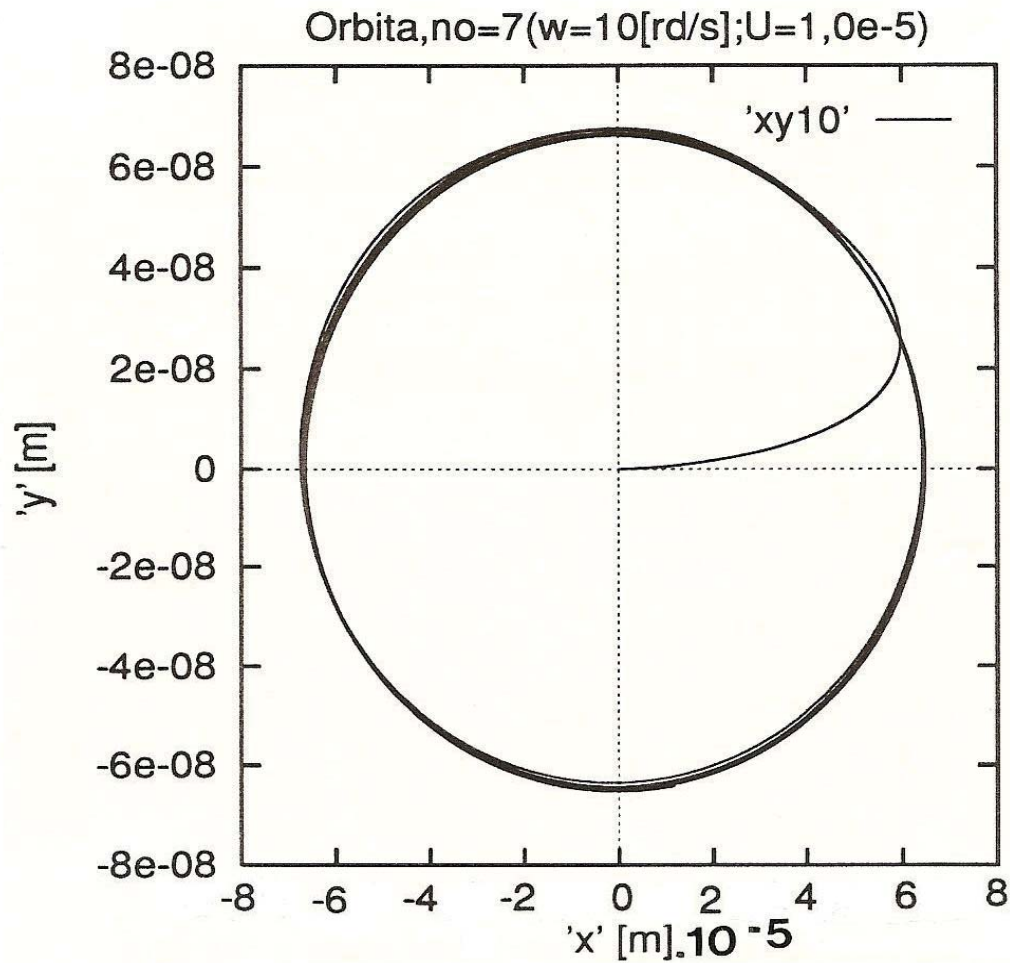


Figura 6.9: Amplitude do Deslocamento x Rotação (nó=7;w=10[rd/s];U=1,0.10⁻⁵)

A seguir são mostradas as órbitas e deslocamentos do centro **Or** do rotor, no nó do mancal, com diferentes velocidades de rotação, partindo centrado e em repouso. As Figuras 6.12 (a), (b) e (c) mostram os mesmos deslocamentos e órbitas do rotor, agora com velocidade de rotação de 60 [rd/s]. Percebe-se um pequeno aumento na amplitude da órbita a 60 [rd/s] com relação a de 30 [rd/s] (Figura 6.11), indicando o início da instabilidade do filme de fluido, que ocorre a 80 [rd/s], como será mostrado a seguir.

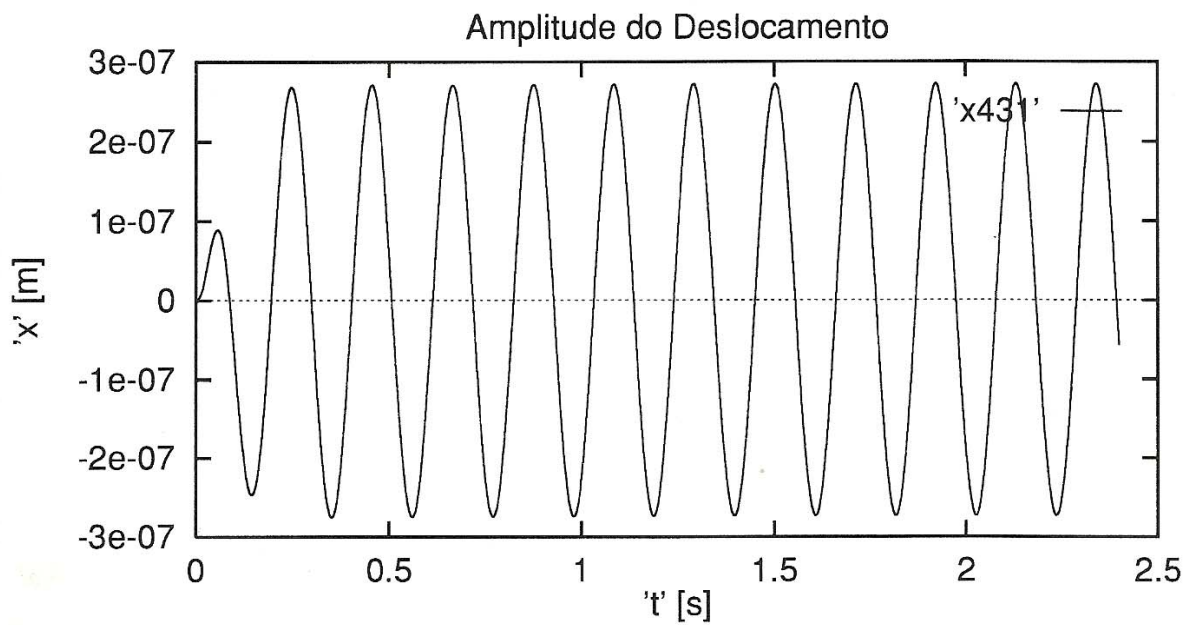


Figura 6.10 (a): Deslocamento em x ; $\omega=30$ [rd/s]

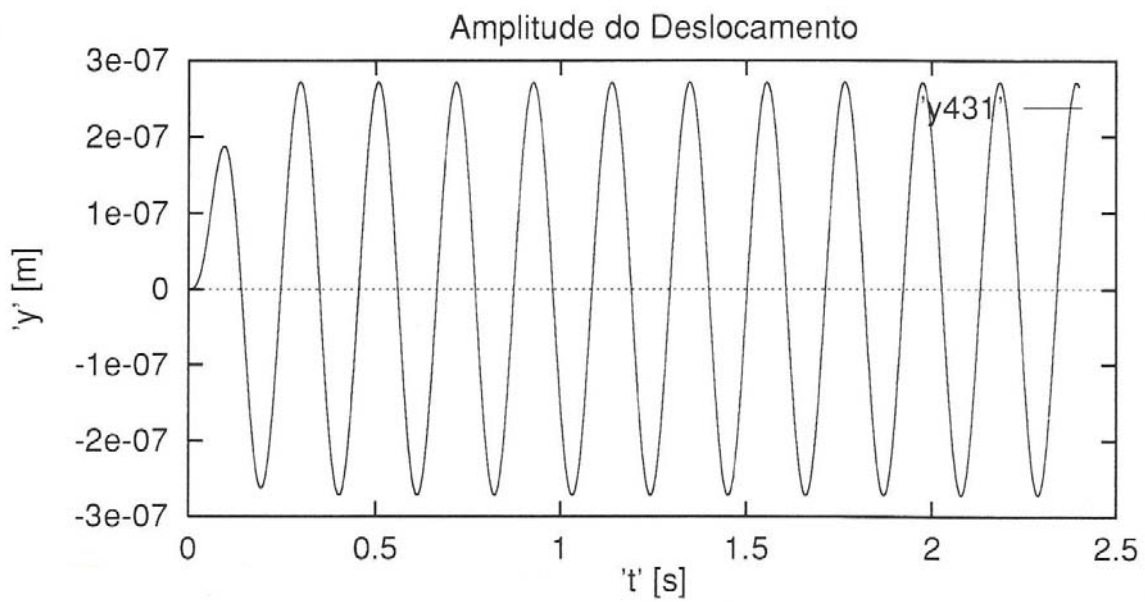


Figura 6.10 (b): Deslocamento em y ; $\omega=30$ [rd/s]

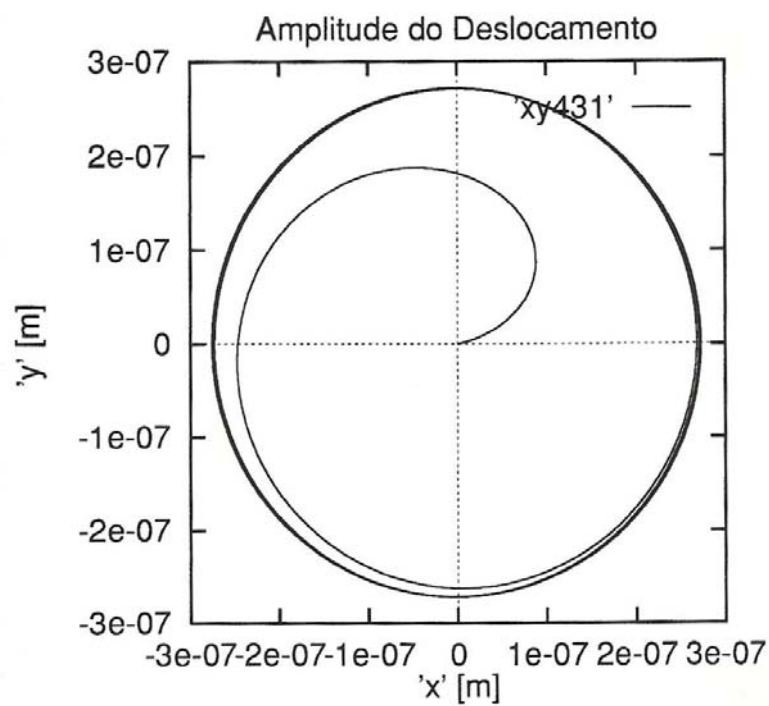


Figura 6.10(c) Amplitude do Deslocamento x Rotação (nó=4;w=30;U=1,0.10⁻⁵)

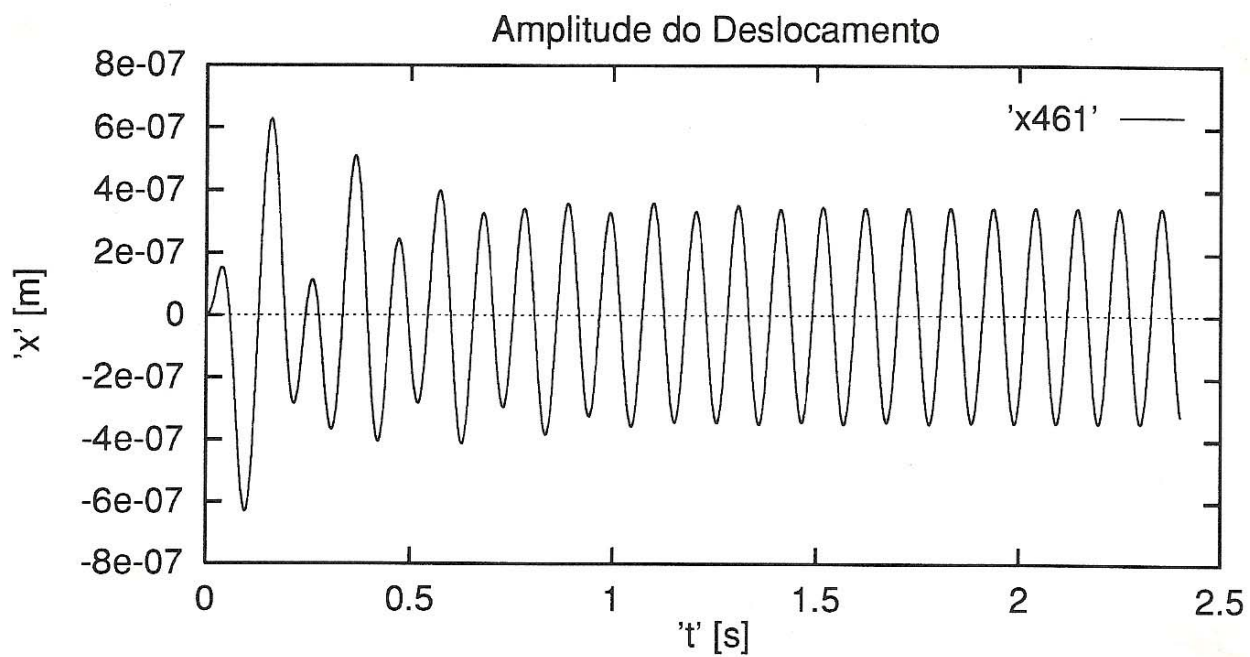


Figura 6.11 (a): Deslocamento em x; w=60[rd/s]

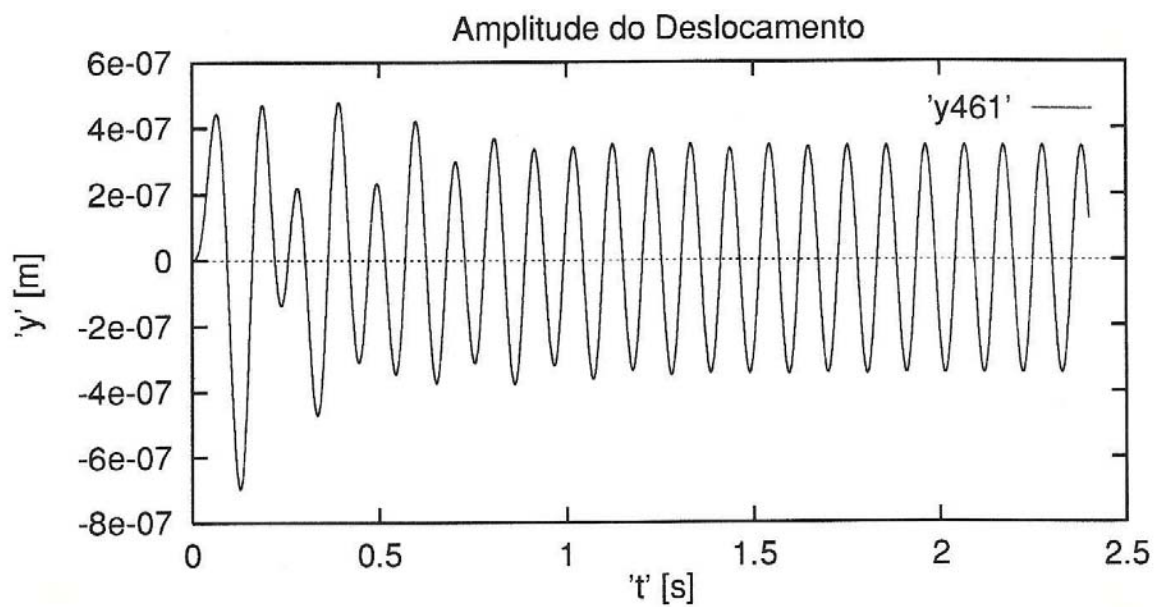


Figura 6.11 (b): Deslocamento em y ; $w=60[\text{rd/s}]$

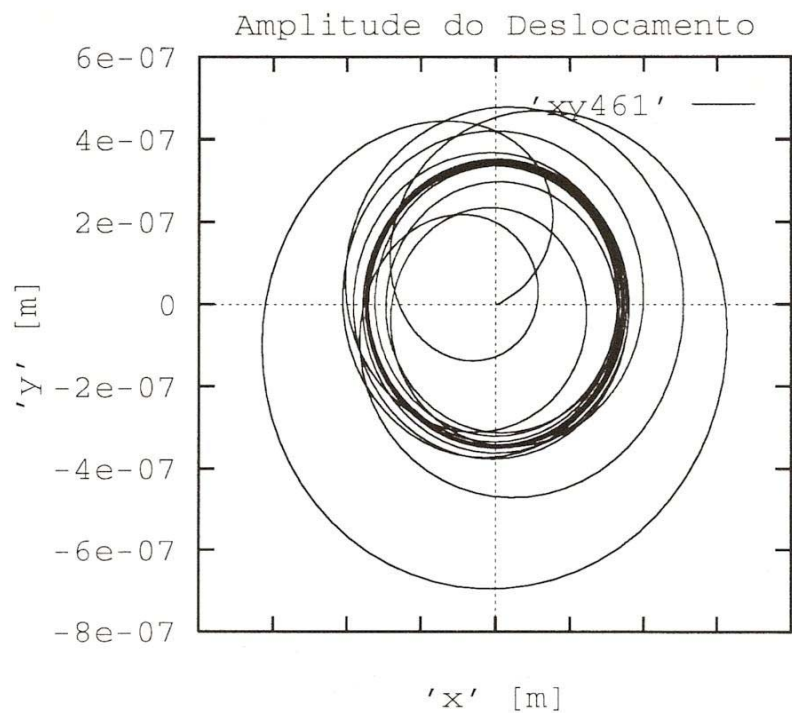


Figura 6.11 (c): Amplitude do deslocamento x Rotação (nó=4;; $w=60[\text{rd/s}]$; $U=1,0 \cdot 10^{-5}$)

6.3.4 Efeitos Whip/Whirl do Filme de Óleo

Além das forças de desbalanceamento rotativo, as máquinas que operam de acordo com a dinâmica de rotores têm um outro tipo de fonte de excitação à vibração. A excentricidade da massa provoca uma excitação síncrona e forçada à estrutura, e os sistemas suportados ou guiados por mancais hidrodinâmicos estão sujeitos à uma outra forma de vibração chamada *auto-excitada*.

Os sistemas auto-excitados têm uma maneira própria de vibrar. O movimento de vibração é criado e/ou controlado pelo próprio sistema. A amplitude da vibração deste movimento vai aumentando, até que algum efeito não-linear limite este crescimento. A energia que supre as vibrações é obtida de uma fonte de potência uniforme associada ao sistema, a qual dá início ao movimento, devido à algum mecanismo inerente ao sistema..

Ehrich [18] relata a natureza dessa vibração comparada à forçada, onde a força de sustentação existente independe do movimento e persiste quando cessa a vibração, forçando o sistema por ela excitado a vibrar em concordância com sua frequência de excitação. Na vibração auto-excitada, as forças desestabilizadoras são criadas pelo próprio movimento e farão o sistema assim excitado vibrar na sua própria frequência natural, independente de qualquer outro estímulo externo.

A vibração auto-excitada tem uma característica própria que é o surgimento de uma força tangencial normal à deflexão radial do eixo em rotação. A amplitude desta força é proporcional à deflexão e em dado momento, esta força irá superar as forças estabilizadoras devidas ao amortecimento externo e induzirá um movimento de "*whirling*" de amplitude sempre crescente, limitadas somente pelas não-linearidades na rigidez e no amortecimento, que por sua vez, limitam as deflexões.

Geralmente, os fenômenos de instabilidade nos rotores ocorrem acima da primeira velocidade crítica, muitas vezes num valor próximo ao dobro da mesma [2]. Para o caso do mancal cilíndrico em estudo, conforme introduzido no item 6.2.2.1, este fenômeno é facilmente visualizado a 80 [rd/s], no nó 4 do mancal (Fig. 6.3), não ocorrendo no nó 2 do eixo (Fig. 6.4).

A fim de verificar com maior precisão o comportamento do rotor numa faixa mais ampla de rotação, simulou-se a resposta dinâmica do sistema com mancal cilíndrico plano até 160 [rd/s]. A Figura 6.12 mostra que o salto de amplitude próximo a 80 [rd/s] permanece com o valor elevado de amplitude até o final da simulação, não caracterizando uma segunda frequência natural, estando muito mais próximo de um movimento auto-excitado.

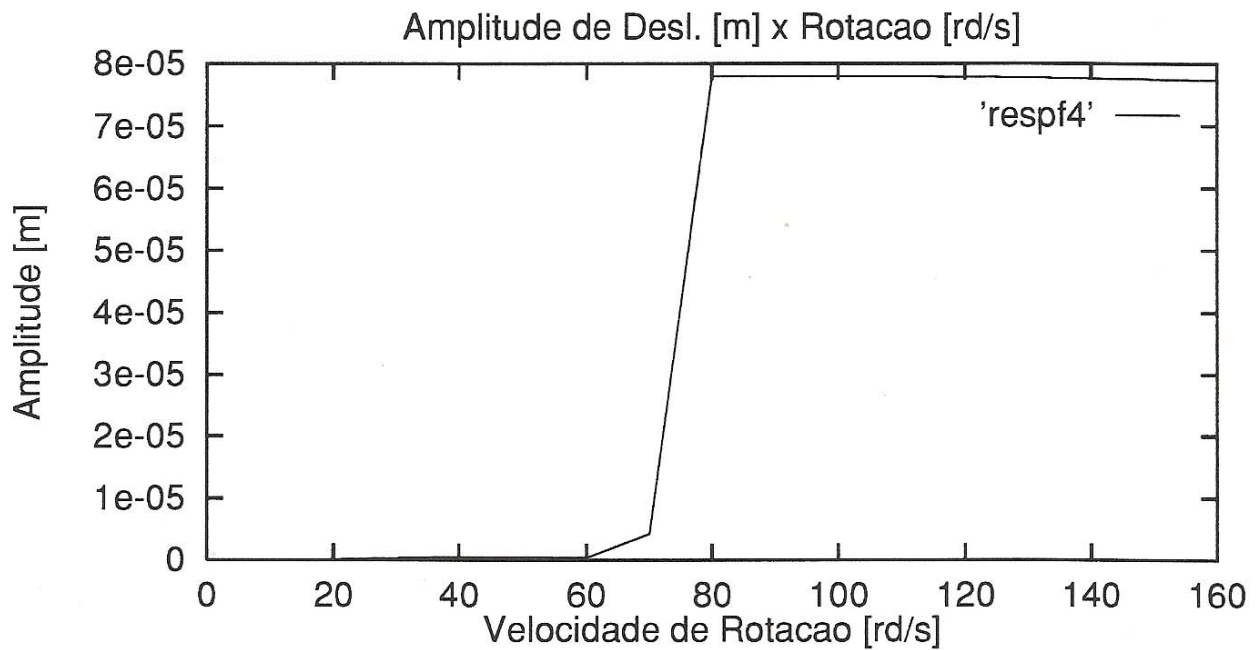


Figura 6.12: Amplitude do Deslocamento - mancal cilíndrico, nó 4

Para complementar a análise do efeito de "Oil Whip" neste mancal, as Figuras 6.13 (a) e (b) complementam a análise iniciada no item 6.3.3 (Figuras 6.10 e 6.11).

Neste caso, aconselha-se a faixa de operação entre a primeira velocidade crítica e aquela que caracteriza a instabilidade do filme de óleo.

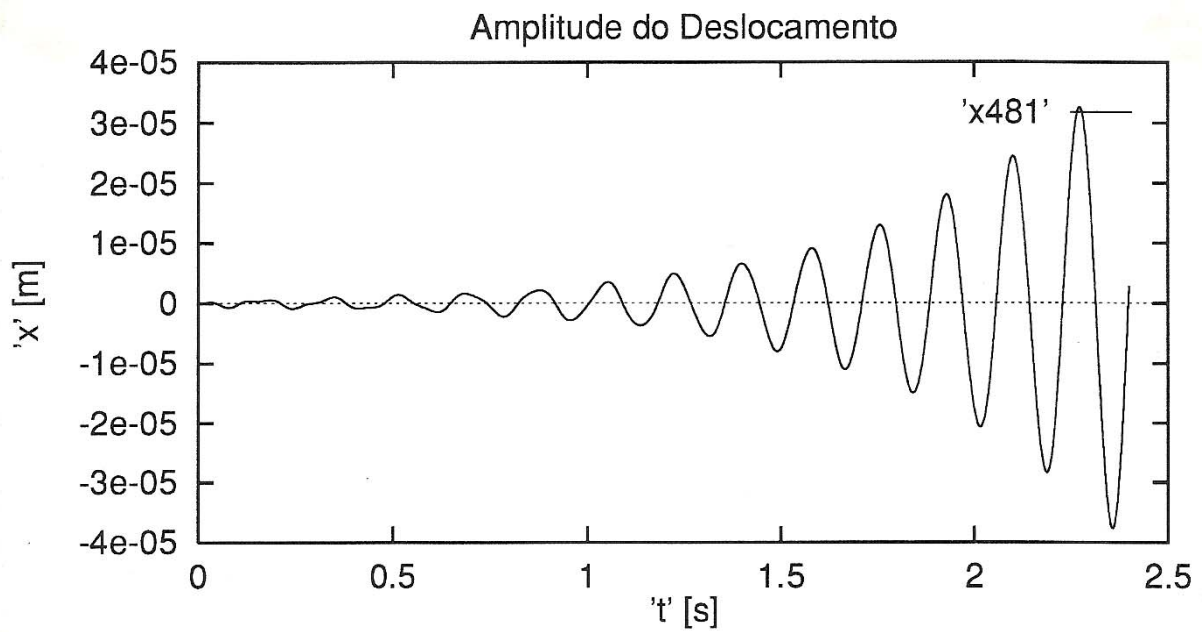


Figura 6.13 (a): Deslocamento em x ; $w=80[\text{rd/s}]$

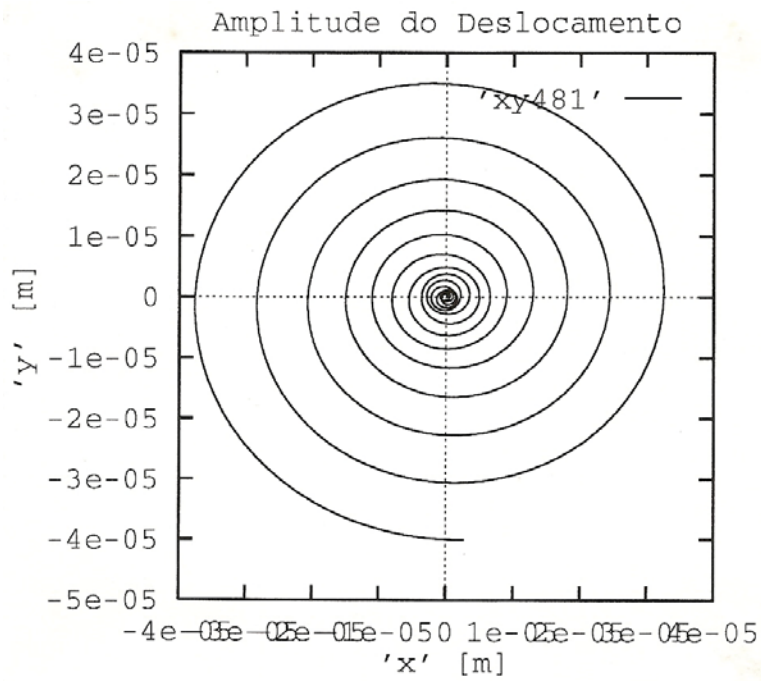


Figura 6.13(b): Órbita (nó=4; $w=80[\text{rd/s}]$)

6.3.5- Efeito de uma Perturbação tipo Impulso

Finalizando a análise do mancal cilíndrico, foram estudados os efeitos de eventuais impulsos externos atuando no rotor no nó do mancal. O objetivo desta análise é verificar se o impulso pode desestabilizar o movimento do rotor no interior do mancal, ocasionando contato direto entre os mesmos, que deve ser evitado.

Inicialmente foi simulado um impulso de 50 [N], suficiente para deslocar a órbita do eixo no interior do mancal à uma rotação de 30 [rd/s]. As Figuras 6.14 (a) e (b) exemplificam o impulso atuando na direção x , sentido negativo. As Figuras 6.15 (a) e (b) exemplificam o impulso atuando na direção x , sentido positivo.

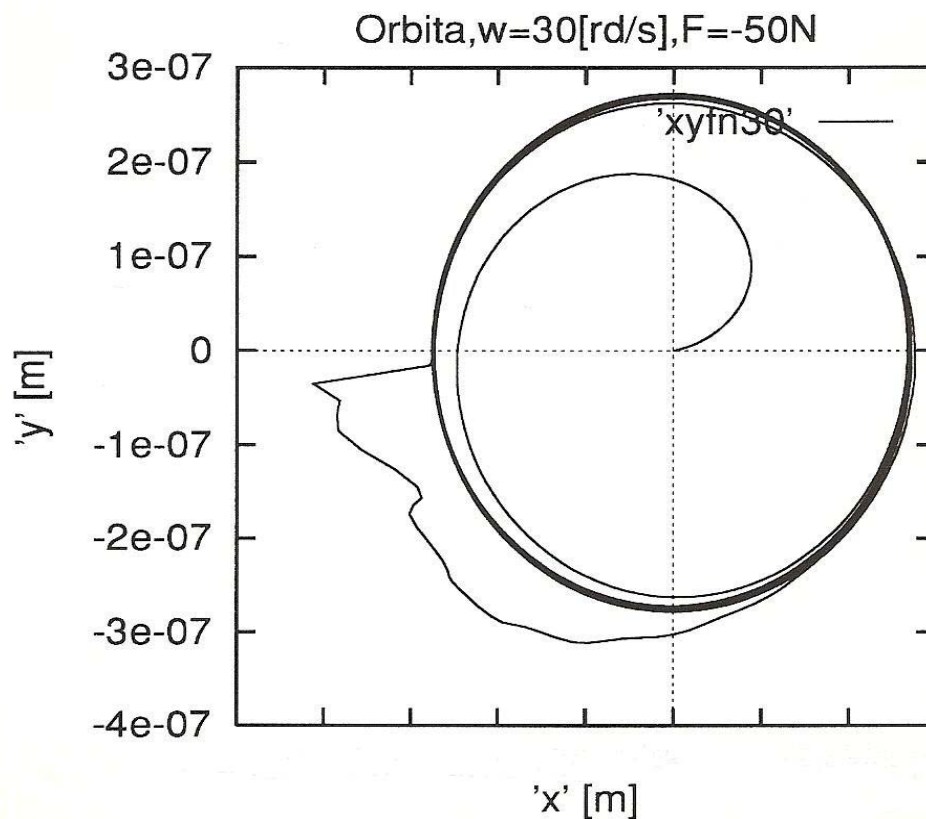


Figura 6.14 (a): Órbita (nó=4; $w=30[\text{rd/s}]$; $F=-50[\text{N}]$)

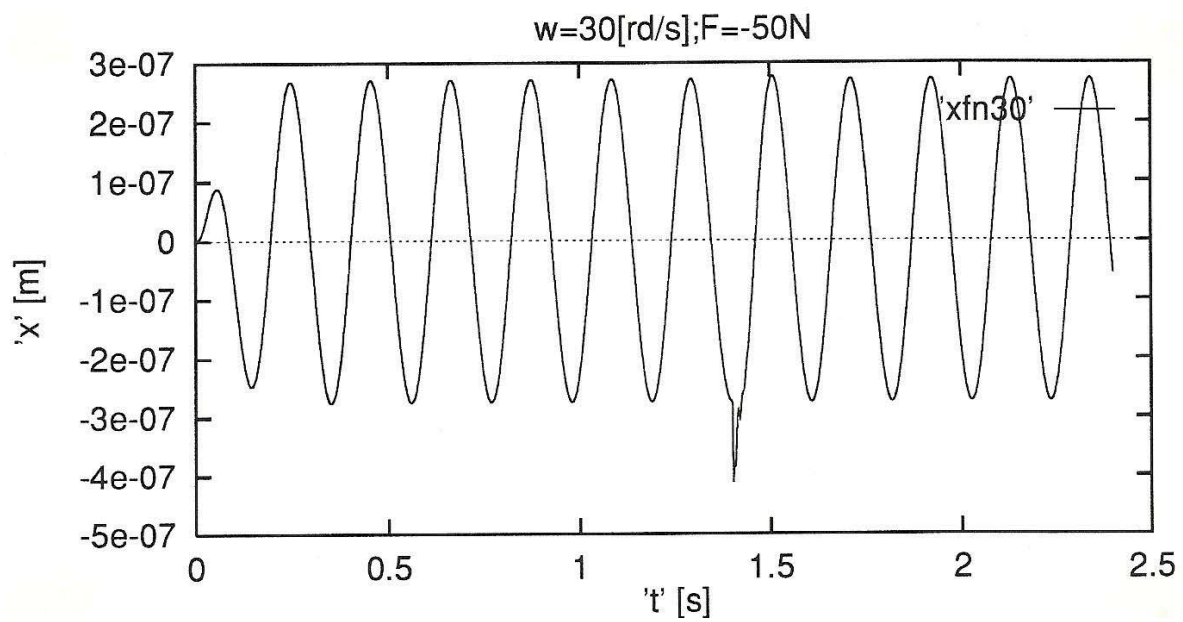


Figura 6.14 (b): Amplitude do Deslocamento $w=30[\text{rd/s}]; F=-50[\text{N}]$

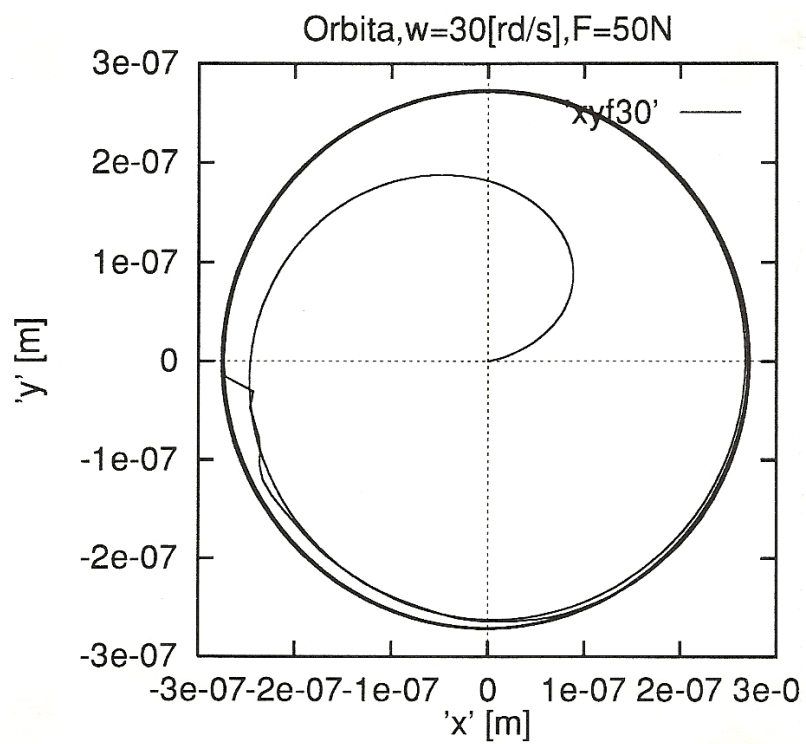


Figura 6.15(a): Órbita (nó=4; $w=80 [\text{rd/s}]; F=+50[\text{N}]$)

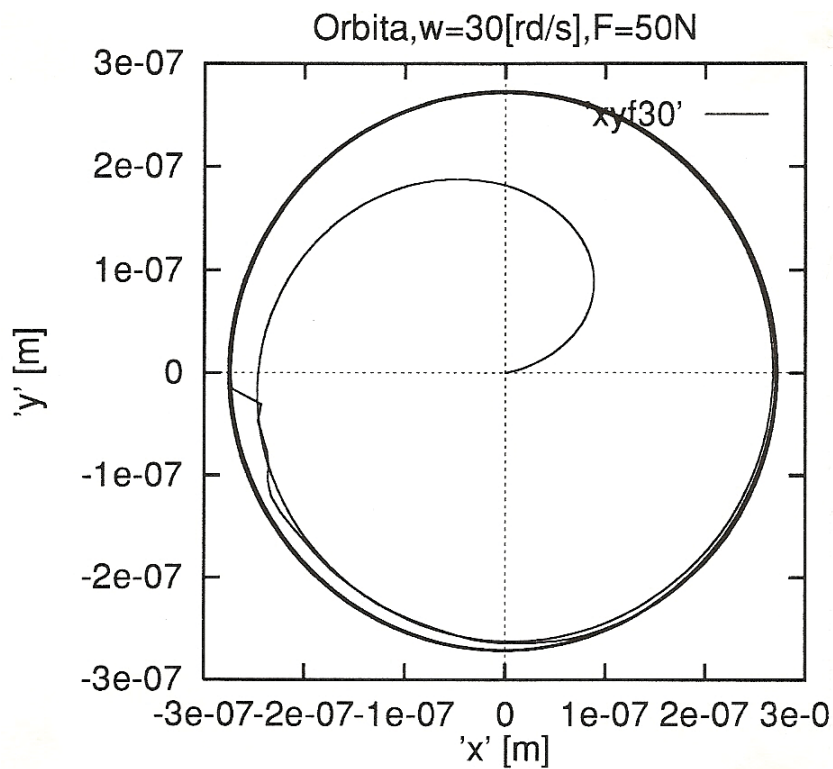


Figura 6.15 (b): Amplitude do Deslocamento $w=30[\text{rd/s}]$; $F=-50[\text{N}]$

A seguir, a mesma análise foi realizada para a rotação de $100 [\text{rd/s}]$, sendo que, neste caso, foi necessário um impulso de $5000 [\text{N}]$ na direção y . para deslocar o rotor de sua órbita. As Figuras 6.16 (a) e (b) exemplificam o impulso atuando na direção x , sentido negativo.

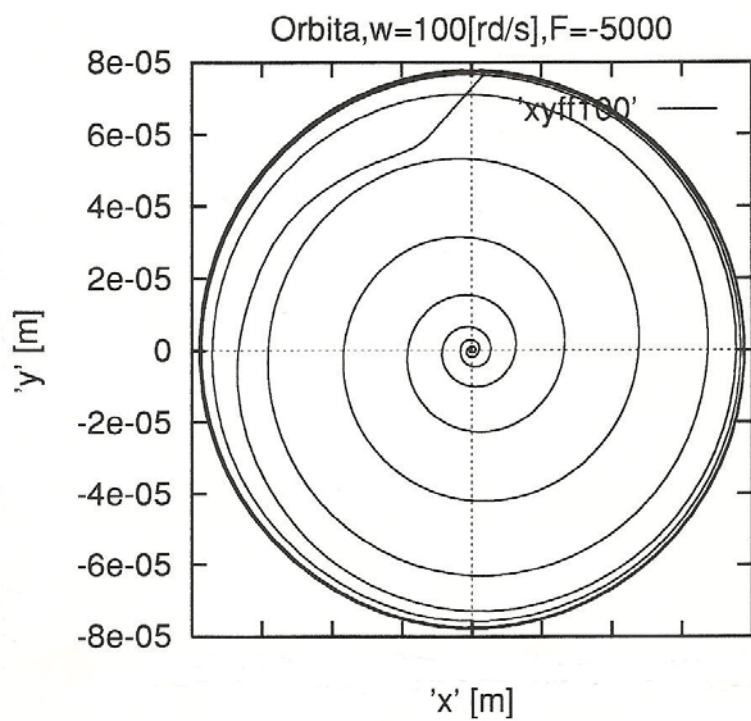


Figura 6.16 (a): Órbita (nó=4, $w=100[\text{rd/s}]$; $F=-5000 [\text{N}]$)

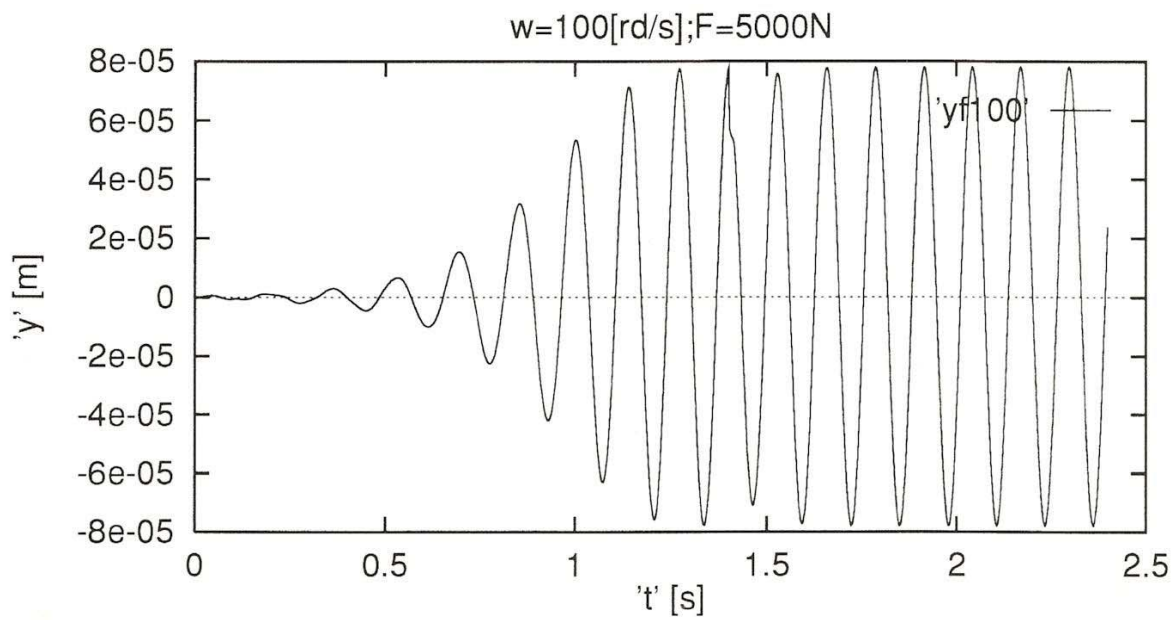


Figura 6.16 (b): Amplitude do Deslocamento $w=100[\text{rd/s}]$; $F=-5000[\text{N}]$

As Figuras 6.17 (a) e (b) exemplificam o impulso atuando na direção x , sentido positivo.

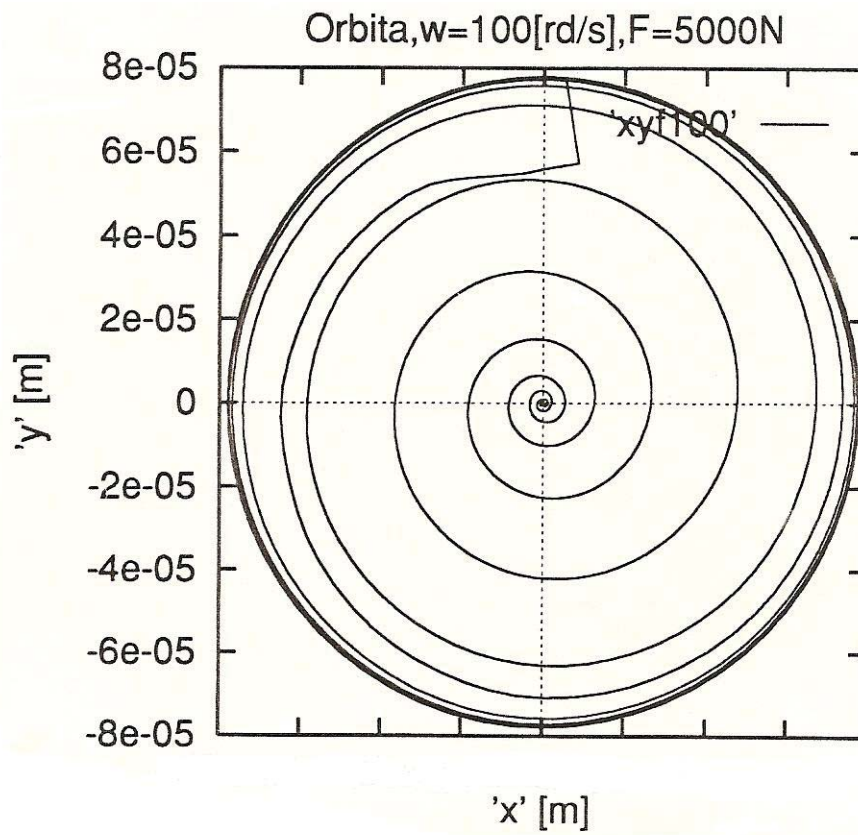


Figura 6.17 (a): Órbita (nó=4 $w=100$ [rd/s]; $F=+5000$ [N])

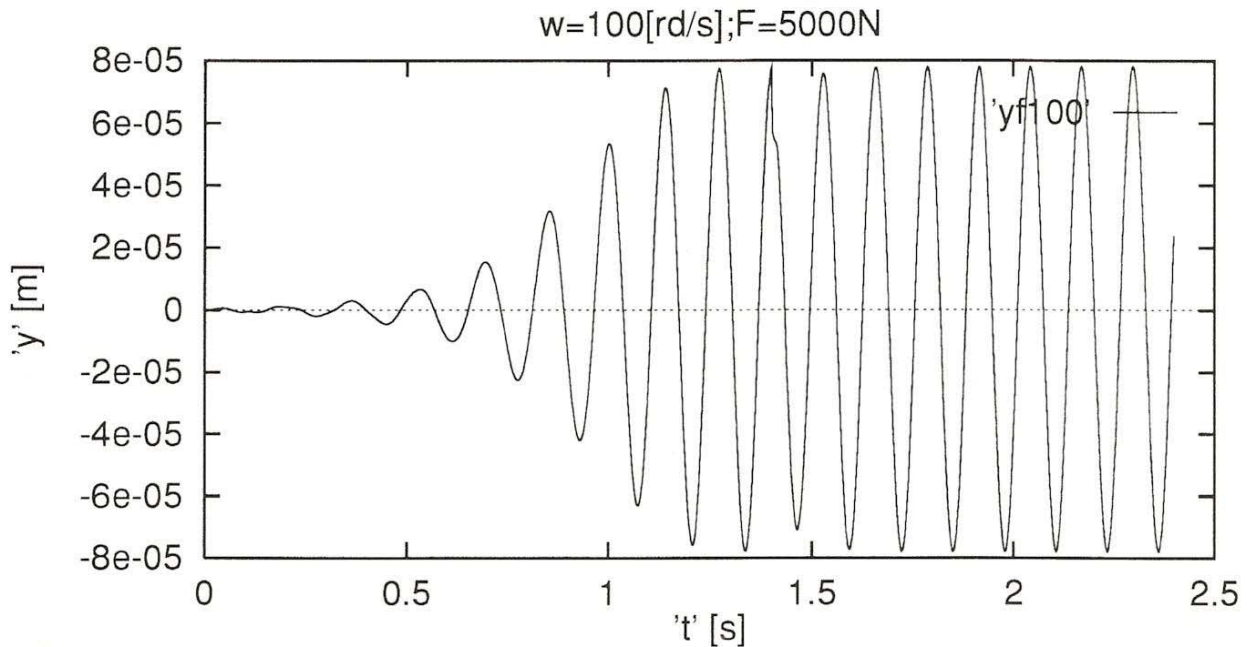


Figura 6.17 (b): Amplitude do Deslocamento $w=100[\text{rd/s}]; F=+5000[\text{N}]$

Nota-se, nos casos simulados, que o ciclo-limite atrai para si o movimento oscilatório, após a atuação do impulso.

6.4 Resultados para Mancal Segmentado.

6.4.1 Efeito do Desbalanceamento a 100 [rd/s]

Nesta subseção é efetuada uma análise da amplitude da órbita descrita pelo centro do rotor no interior do nó do mancal tipo segmentado. A velocidade de rotação do eixo é de 100 [rd/s], situada acima da primeira velocidade crítica do sistema, ou seja, de 40 [rd/s].

Na primeira simulação, o sistema é analisado para os efeitos de um momento de desbalanceamento de $1,0 \cdot 10^{-5} [\text{kg.m}]$, agindo sobre o rotor no nó 7, onde se localiza o disco rígido inferior. As Figuras 6.18 (a), (b) e (c), mostram respectivamente o deslocamento em função do tempo nas direções x e y e a órbita x - y .

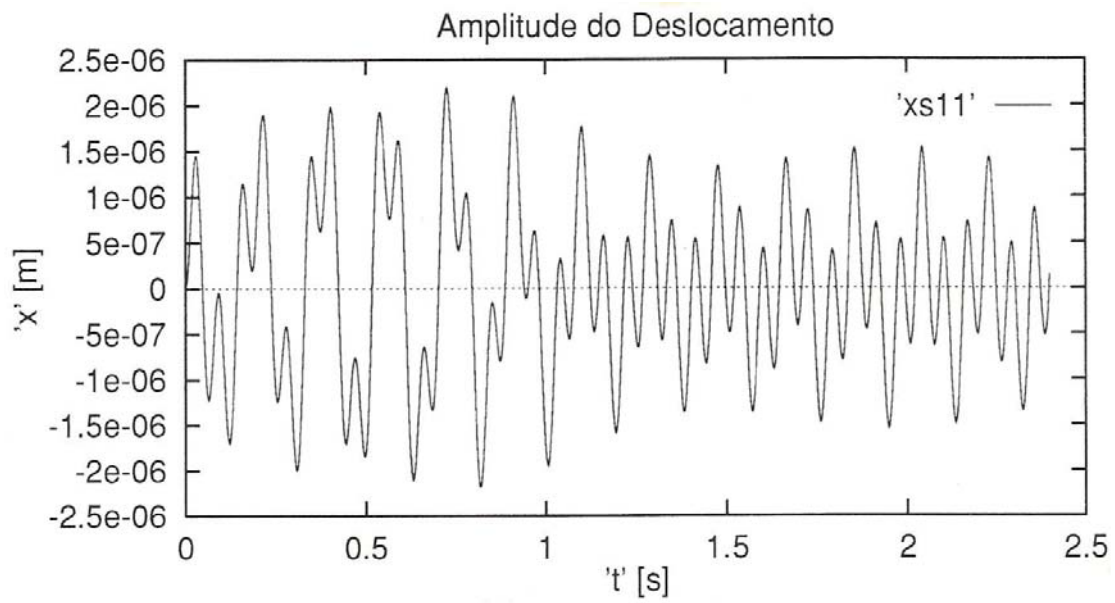


Figura 6.18 (a): Deslocamento em x

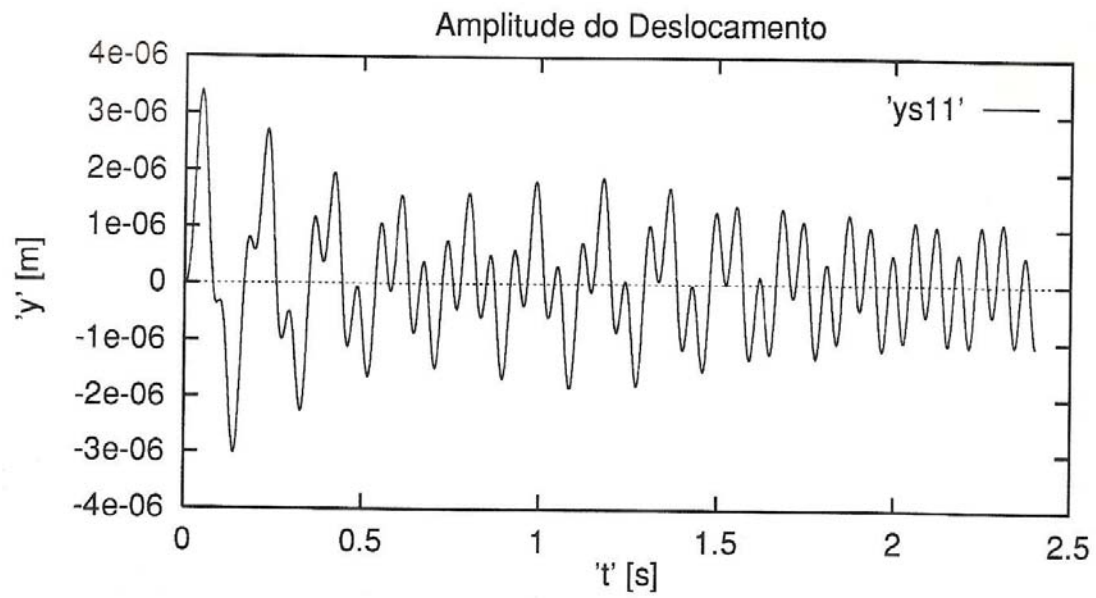


Figura 6.18 (b): Deslocamento em y

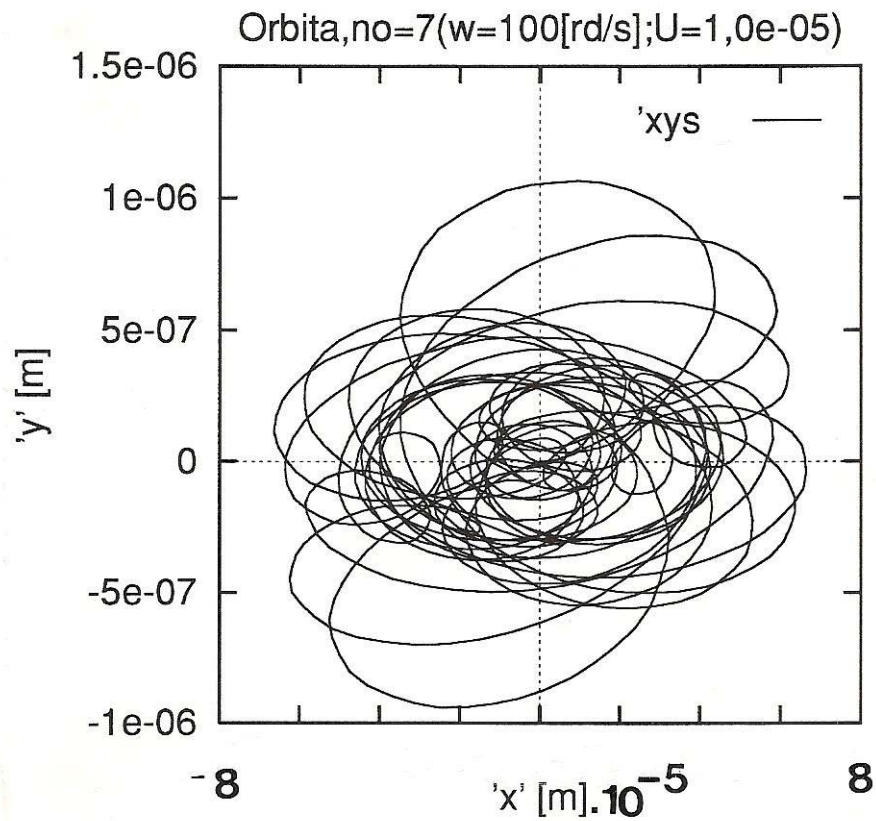


Figura 6.18 (c): Amplitude do Deslocamento x Rotação (nó=7; $U=1,0 \cdot 10^{-5}$)

A seguir o sistema é simulado para um desbalanceamento, aplicado no mesmo nó, sendo porém, dez vezes maior que o anterior. O momento de desbalanceamento de $1,0 \cdot 10^{-4}$ [kg.m] provoca uma alteração na força excitadora do movimento e a resposta do sistema pode ser visualizada nas Figuras 6.19 (a), (b) e (c), abaixo.

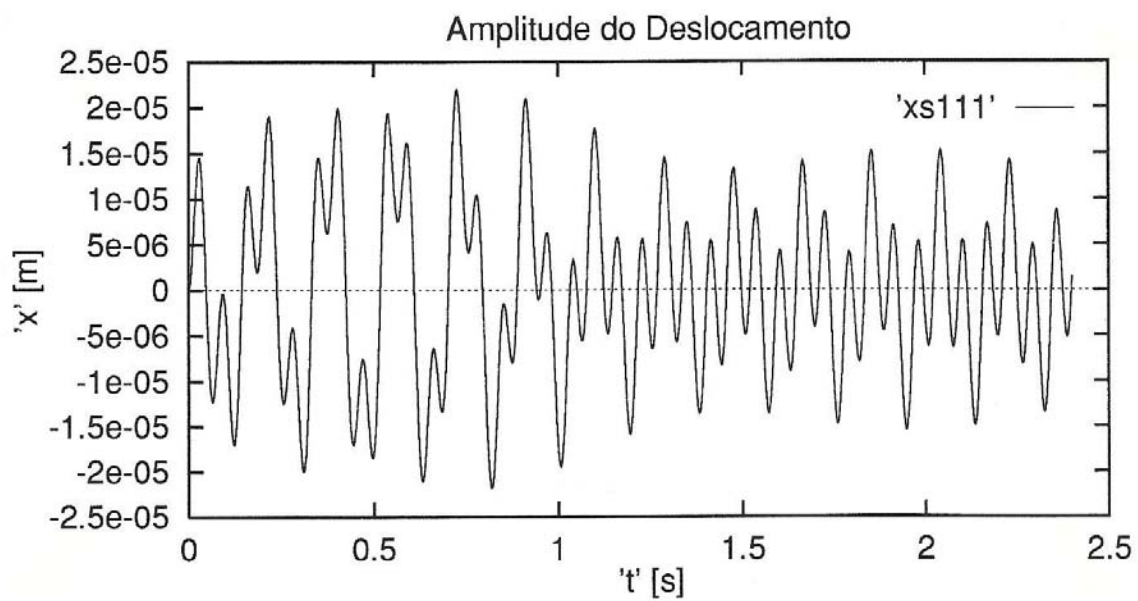


Figura 6.19 (a) Deslocamento em x

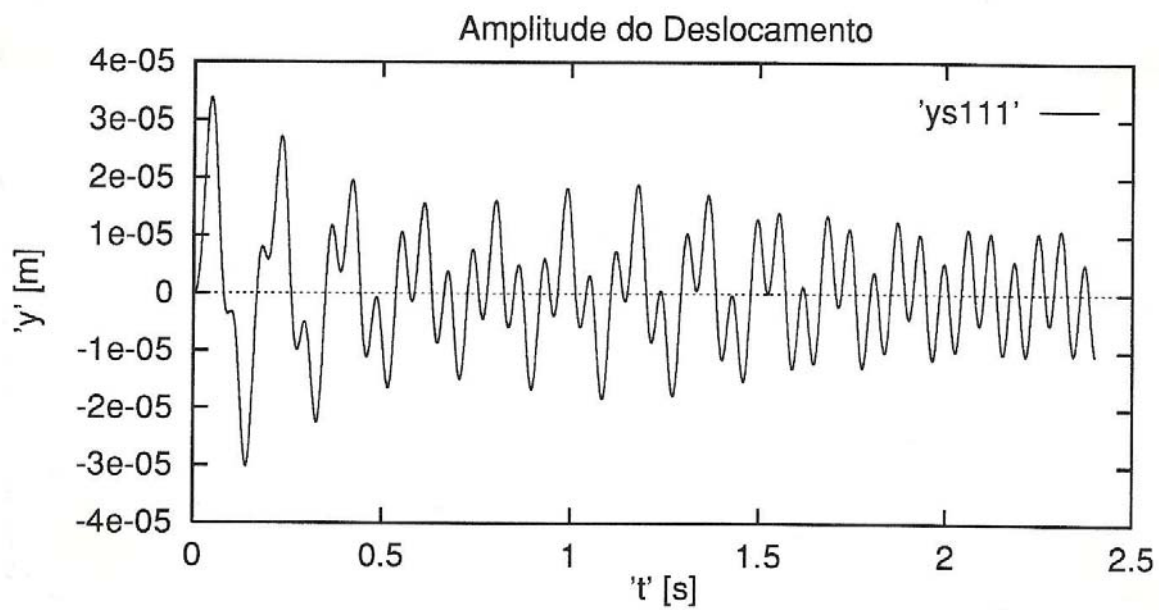


Figura 6.19 (b): Deslocamento em y

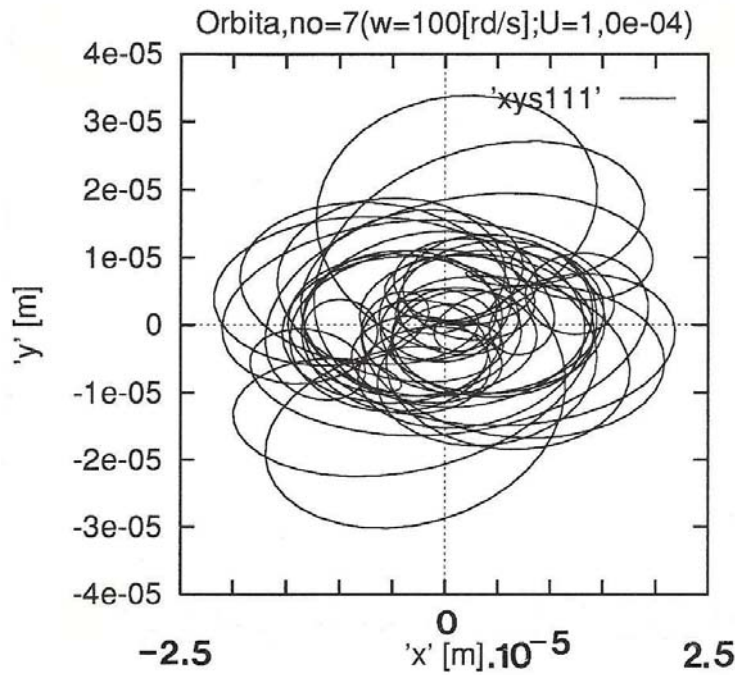


Figura 6.19 (c): Órbita, nó=7, $U=1,0 \cdot 10^{-04}$

Pode-se perceber que a resposta do sistema com maior força de desbalanceamento aplicada responde muito à excitação semelhantemente ao caso anterior. As amplitudes apresentadas para as órbitas não são as mesmas para ambos os casos e estão limitadas pelo ciclo limite em aproximadamente $8,0 \cdot 10^{-5}$. A principal diferença é a amplitude que o movimento alcança. Devido aos efeitos não-lineares de amortecimento presentes no filme de fluido lubrificante, como o descrito em [18][37].

6.4.2 Efeito da Posição de Partida

As máquinas rotativas verticais não têm uma posição preferencial de partida. Nas máquinas horizontais esta posição de partida é definida por uma força estática devido ao peso próprio do rotor, agindo na direção da força de gravidade sobre o fluido lubrificante, ainda estático. A ação do peso do rotor faz com que parte do volume do fluido lubrificante do mancal

retorne para o reservatório de alimentação, de modo que apenas uma pequena camada do lubrificante esteja presente no início do movimento [4][8][37].

As simulações realizadas até agora consideram sempre a condição de partida do rotor centrado, em relação ao sistema de referência \mathbf{O}_{xyz} , com $\mathbf{O}_m = \mathbf{O}_r = \mathbf{O}$. A seguir mostra-se o resultado obtido para a simulação do modelo proposto de rotor com mancal segmentado, supondo-se que o rotor esteja inclinado, ou descentrado, no nó 1. O rotor está centrado no nó 4 do mancal, e sua órbita será avaliada neste ponto.

A Figura 6.20 ilustra o deslocamento do rotor em função do efeito da posição de partida do movimento. Embora haja uma perturbação no início do movimento, percebe-se que a 1 [s] as amplitudes tendem para níveis mais baixos, como nas simulações anteriores, em diferentes condições.

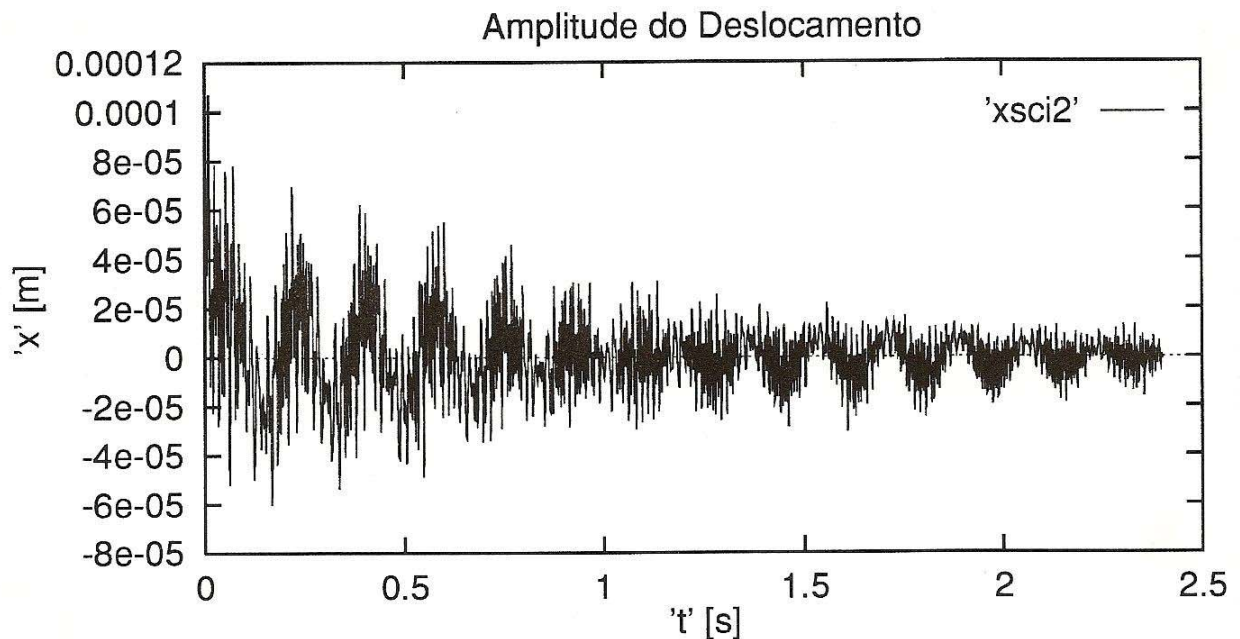


Figura 6.20: Deslocamento x do rotor partindo descentrado no nó 1 e centrado no nó 4.

6.4.3 Comportamento à Diversas Velocidades Partindo do Repouso

A seguir são mostrados os resultados obtidos para as simulações das respostas do rotor com mancal segmentado, em diferentes velocidades de rotação ω , partindo sempre da posição centrada e do repouso ($\omega=0$).

São mostradas as órbitas e deslocamentos do centro O_r do rotor, no nó 4 do mancal, com diferentes velocidades de rotação, partindo centrado e em repouso. As Figuras 6.21, 6.22 e 6.23 (a), (b) descrevem os deslocamentos e órbitas do rotor, agora com velocidades de rotação de 30 [rd/s], 60 [rd/s] e 80 [rd/s] respectivamente. Para este tipo de mancal não ocorre um aumento de amplitude da órbita do rotor como simulado para o cilíndrico. Dos capítulos

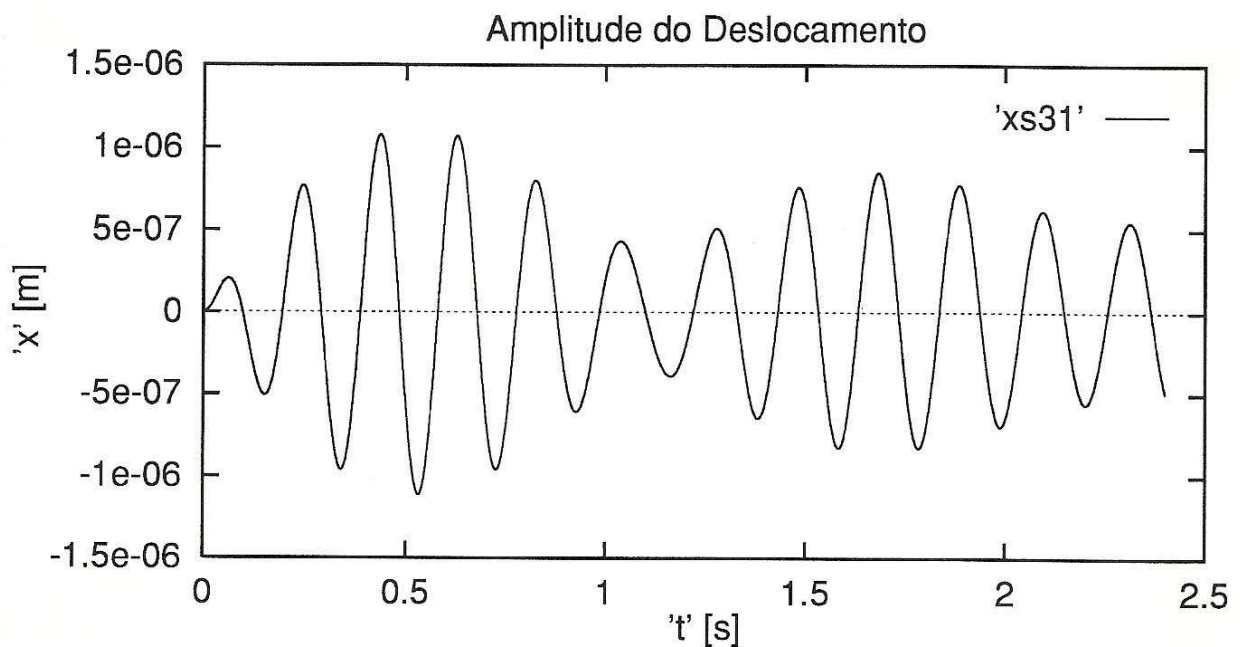


Figura 6.21(a): Deslocamento em x

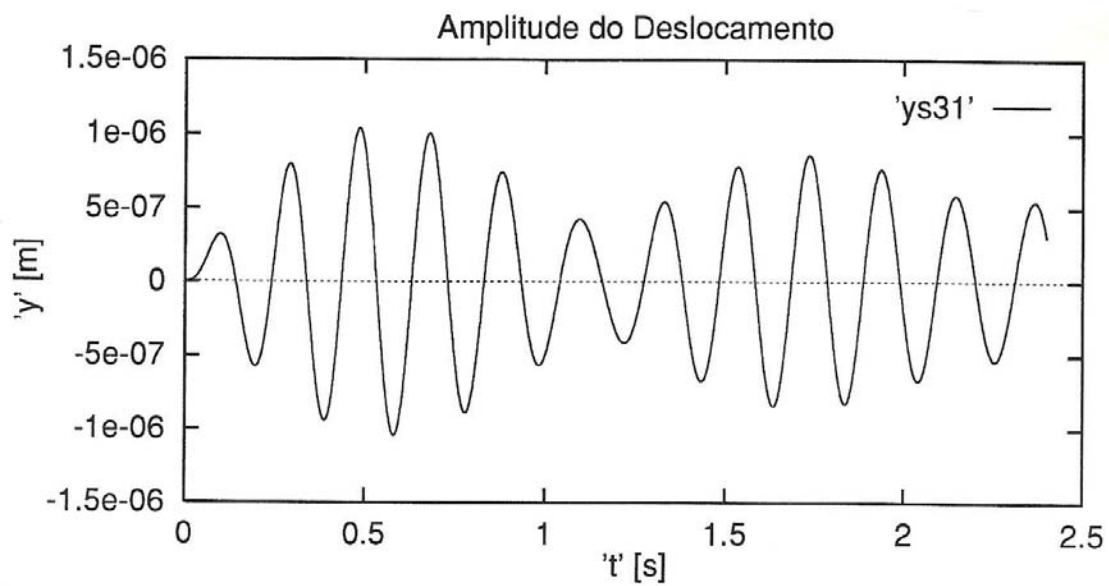


Figura 6.21(b): Deslocamento em y

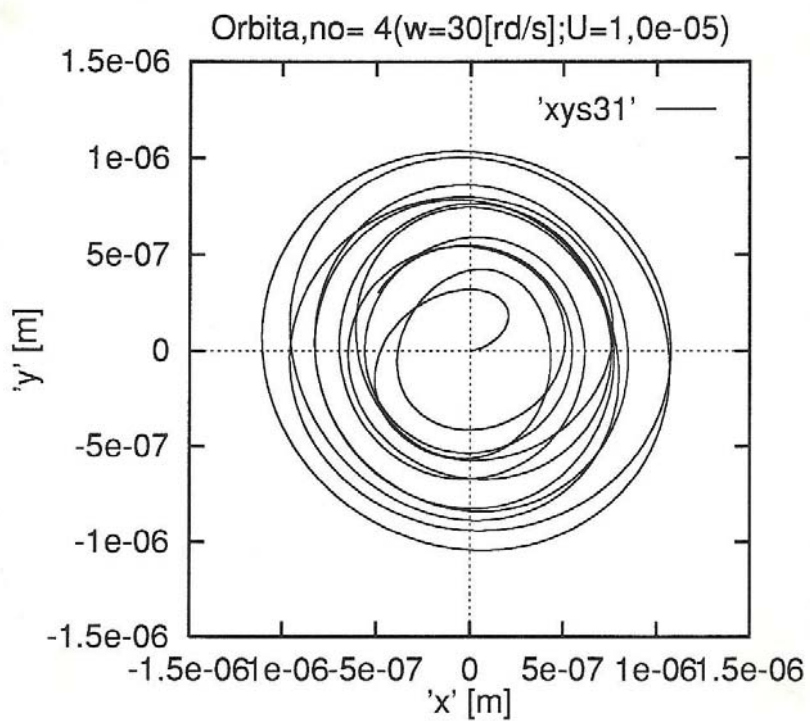


Figura 6.21(c): Órbita, $nó=4$, $w=30$ [rd/s]; $U=1,0 \cdot 10^{-5}$

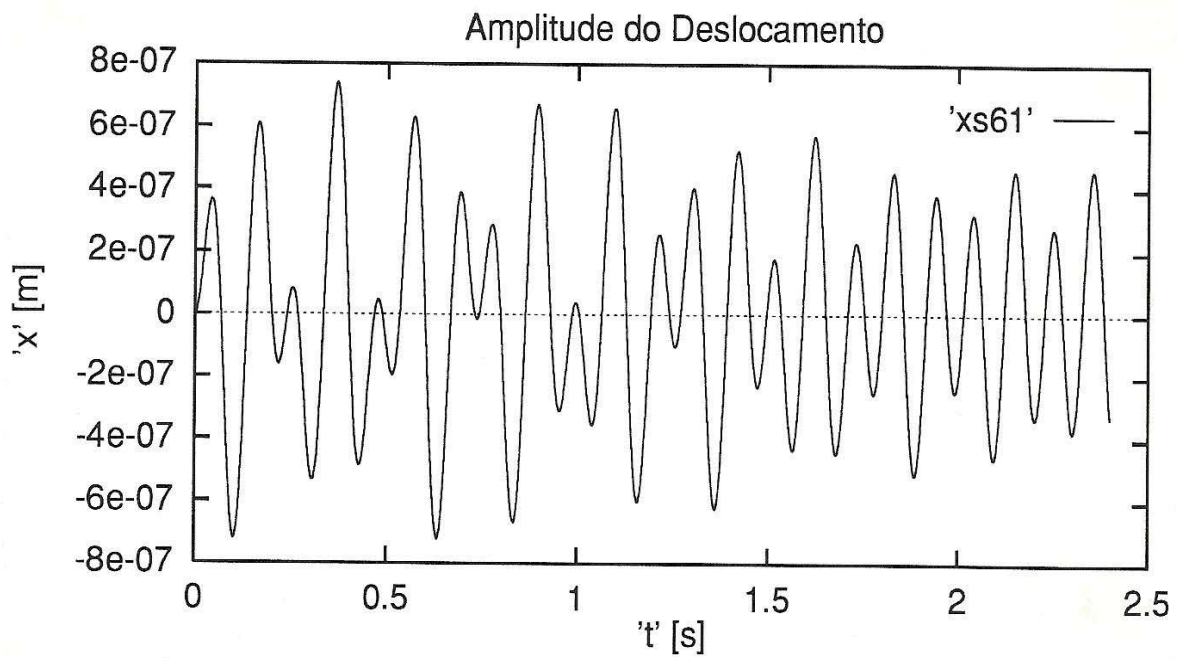


Figura 6.22(a): Deslocamento em x

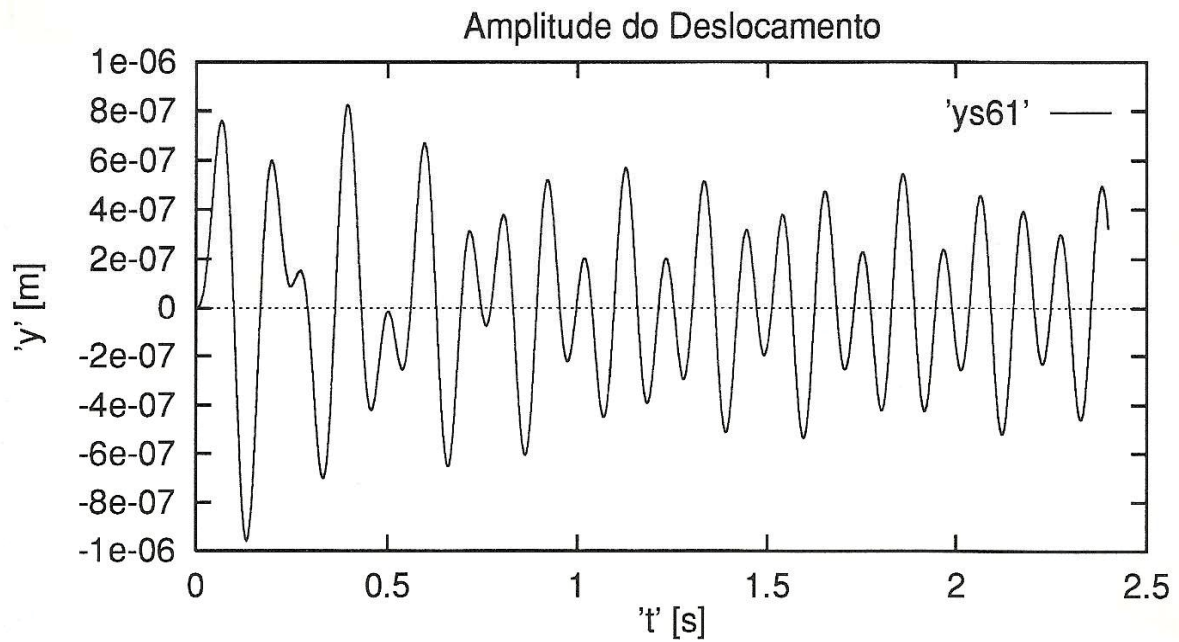


Figura 6.22(b): Deslocamento em y

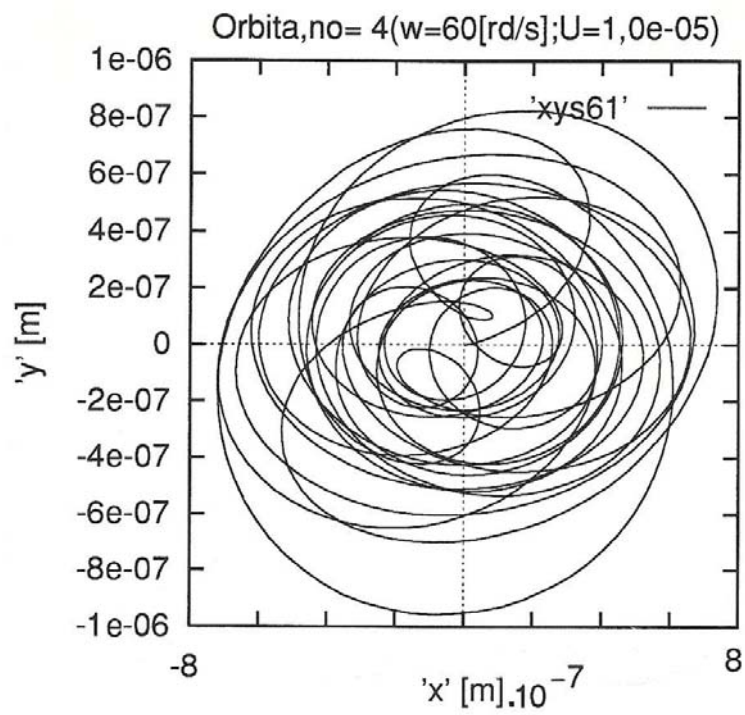


Figura 6.22(c): Órbita, nó=4, $w=60[\text{rd/s}]$; $U=1,0 \cdot 10^{-05}$

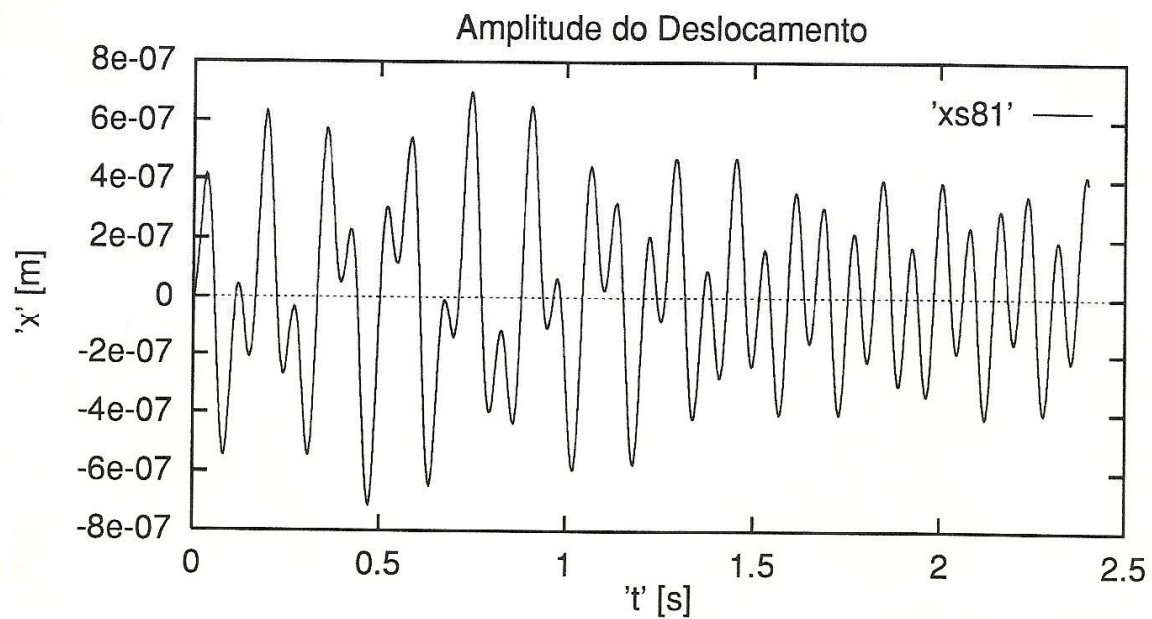


Figura 6.23(a): Deslocamento em x

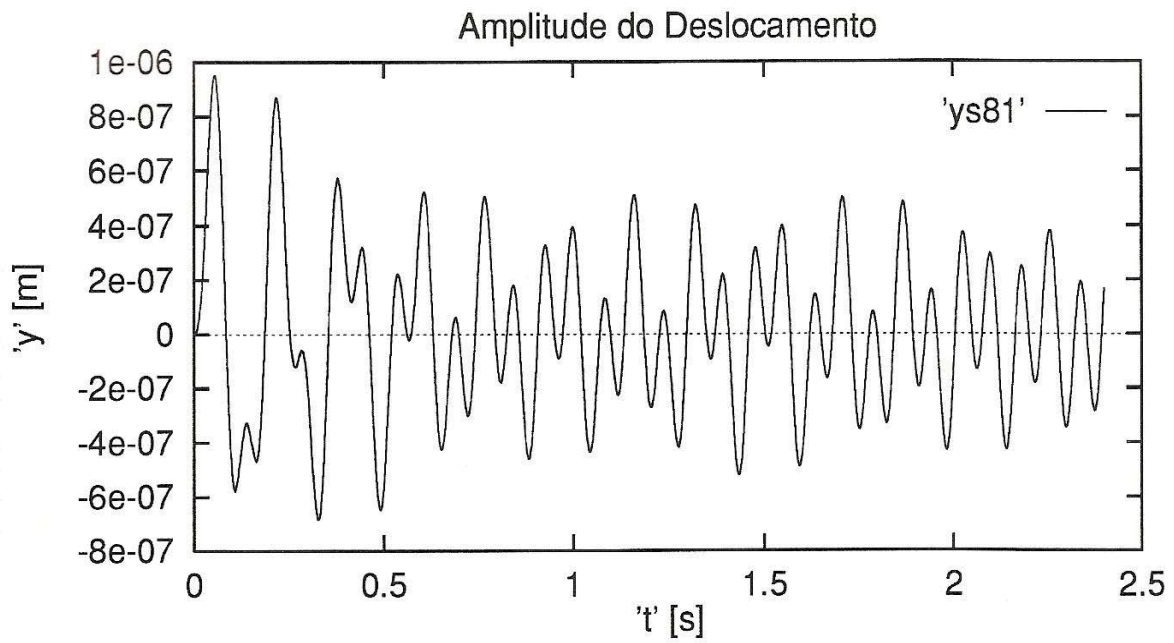


Figura 6.23(b): Deslocamento em y

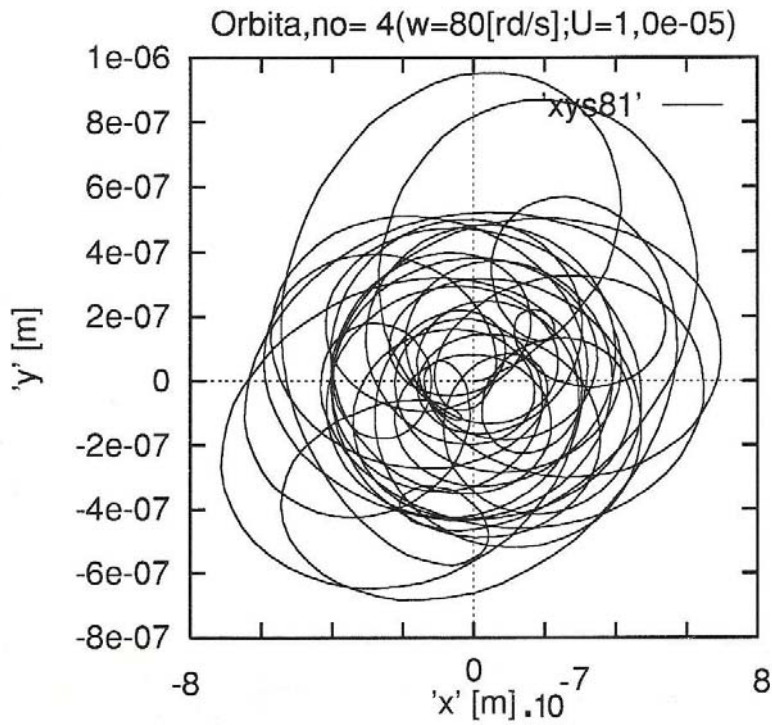


Figura 6.23 (c): Órbita, nó=4,w=80[rd/s];U=1,0.10-05

Para encerrar a análise para diferentes velocidades, simularam-se mais duas condições, onde o efeito do desbalanceamento maior é analisado no nó 4 do mancal. As Figuras 6.24 (a) e (b) mostram a amplitude do deslocamento na direção y e a órbita do rotor neste nó. Com um momento de desbalanceamento $U=1,0 \cdot 10^{-04}$ o deslocamento na direção y e a órbita estão mostrados nas Figuras 6.25 (a) e (b). Nota-se o aumento da ordem de grandeza da órbita.

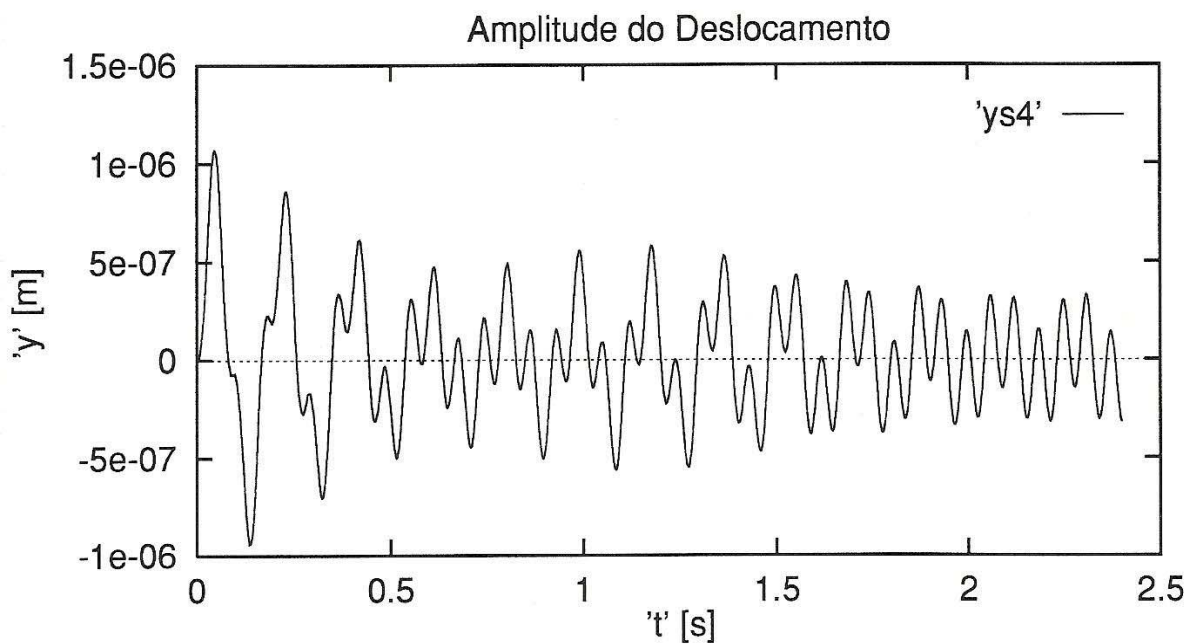


Figura 6.24(a): Deslocamento em y

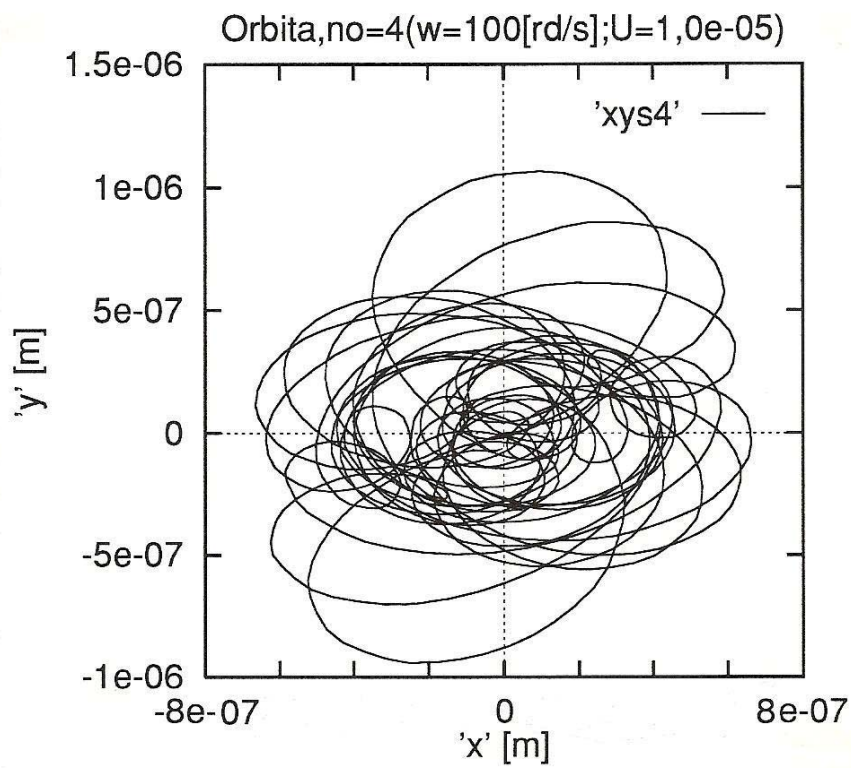


Figura 6.24(b): Órbita, nó=4 ($\omega=100$ [rd/s]; $U=1,0 \cdot 10^{-05}$)

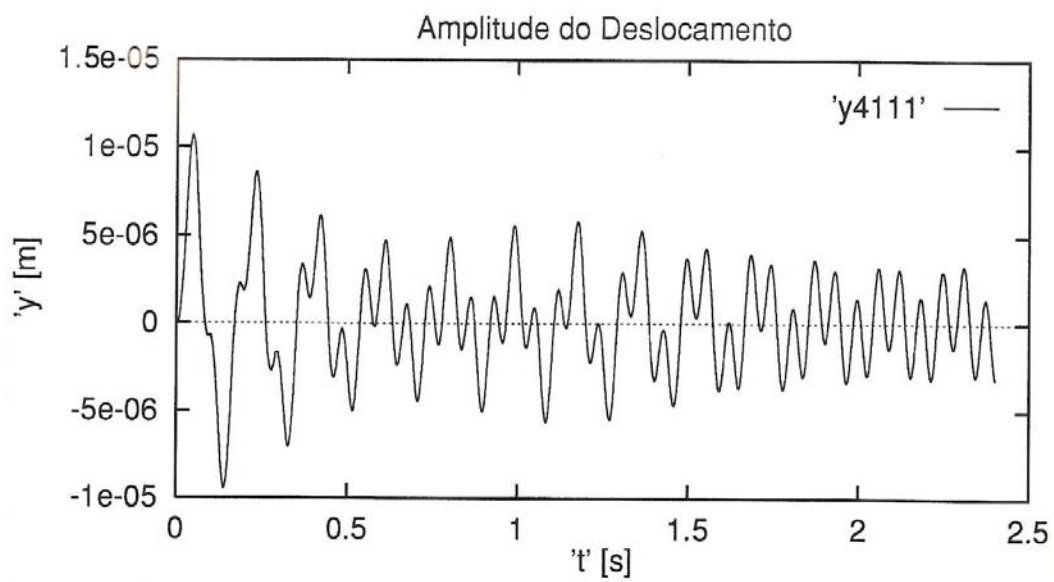


Figura 6.25(a): Deslocamento em y

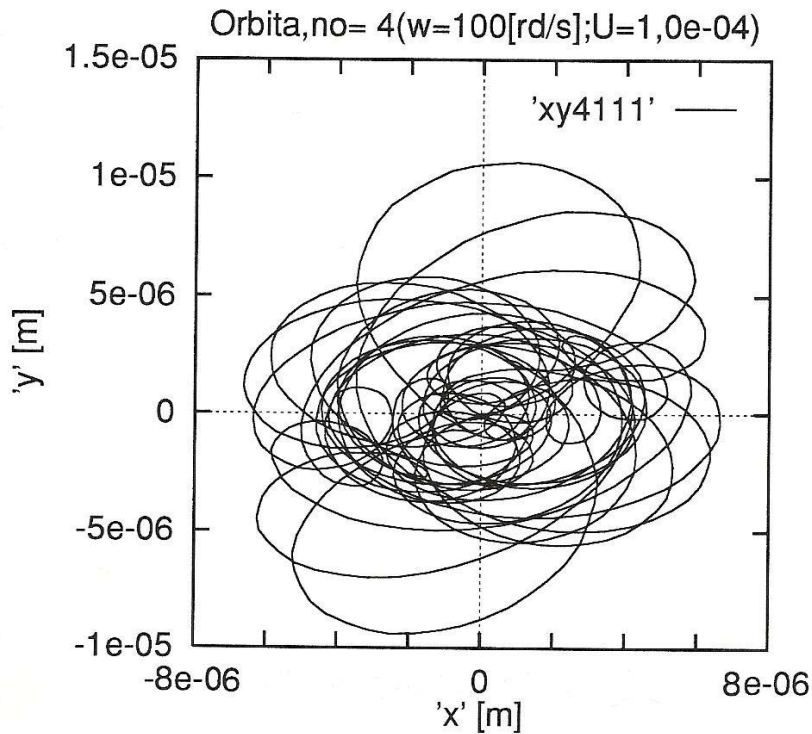


Figura 6.25(b): Órbita, nó=4($w=100[\text{rd/s}]$; $U=1,0 \cdot 10^{-04}$)

6.4.4 Verificação da Instabilidade do Filme de Óleo.

A vibração auto-excitada a que estão submetidos os rotores que operam sobre mancais cilíndricos e que provoca a instabilidade do filme de óleo não ocorre no mancal segmentado. Este tipo de mancal representou uma "revolução" para a estabilidade de rotores flexíveis, já que seu projeto reduz as forças ou coeficientes cruzados e acoplados de rigidez. Os mancais segmentados possuem menor amortecimento a velocidades baixas do que os cilíndricos, entretanto são inerentemente estáveis e não excitam para a instabilidade da dinâmica de rotores, como relatado por [18][37].

Geralmente, os fenômenos de instabilidade nos rotores ocorrem acima da primeira velocidade crítica, muitas vezes num valor próximo ao dobro da mesma [2]. Para o caso do mancal segmentado em estudo, conforme introduzido no item 6.2.2.1, este fenômeno é facilmente

visualizado a 80 [rd/s], no nó 4 do mancal (Fig. 6.3), não ocorrendo o mesmo para o mancal segmentado simulado (Fig.6.26):

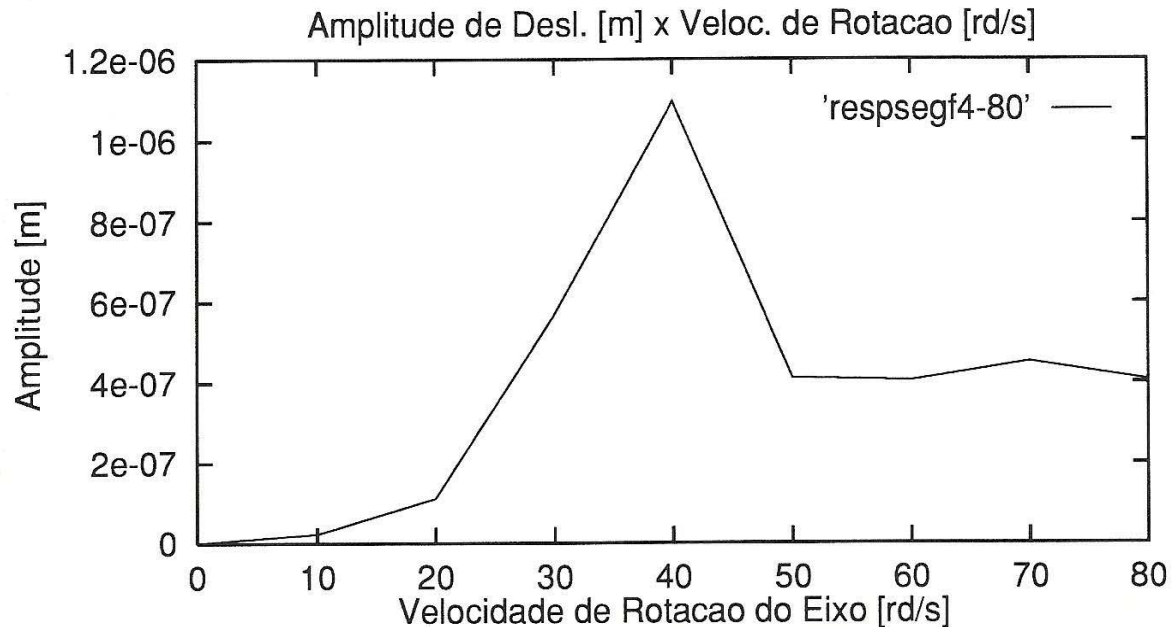


Figura 6.26: Amplitude do deslocamento - mancal segmentado, nó=4

A fim de verificar com maior precisão o comportamento do rotor numa faixa mais ampla de rotação, simulou-se a resposta dinâmica do sistema com mancal segmentado plano até 160 [rd/s]. A Figura 6.13 mostra que o salto de amplitude próximo a 80 [rd/s] permanece com o valor elevado de amplitude até o final da simulação, não caracterizando uma segunda frequência natural, estando muito mais próximo de um movimento auto-excitado. Para o mancal segmentado a resposta até 160 [rd/s] está mostrada na Figura 6.27 abaixo:

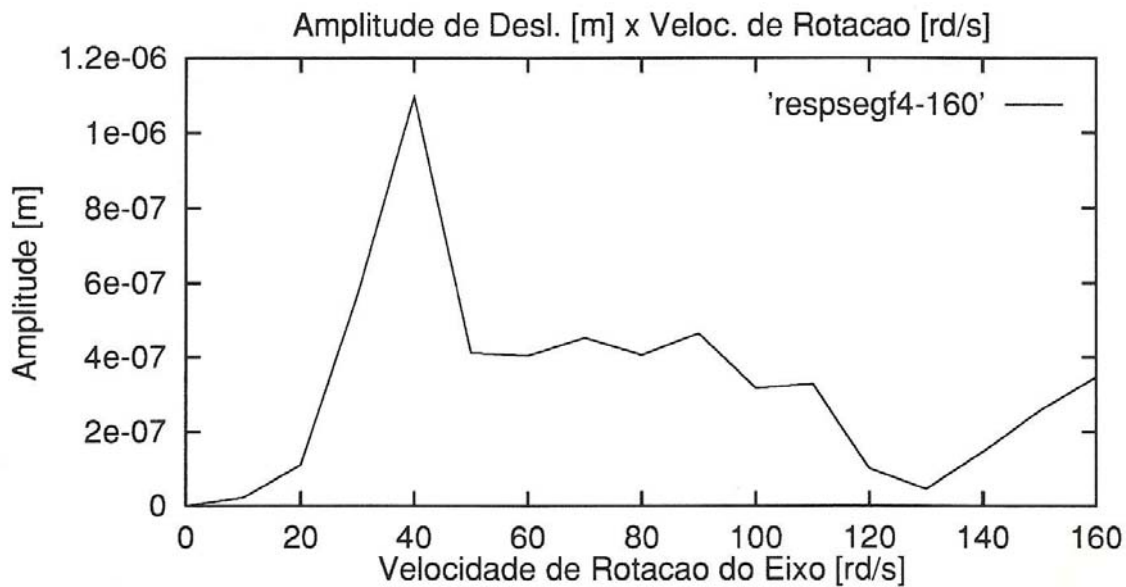


Figura 6.27: Amplitude do Deslocamento, mancal segmentado, nó=4

Para complementar a análise, simulações até 250 [rd/s] foram realizadas e a Figura 6.28 mostra a resposta das amplitudes de deslocamento pela velocidade de rotação do eixo. Pode-se perceber o pico característico da segunda velocidade crítica do sistema com este tipo de mancal.

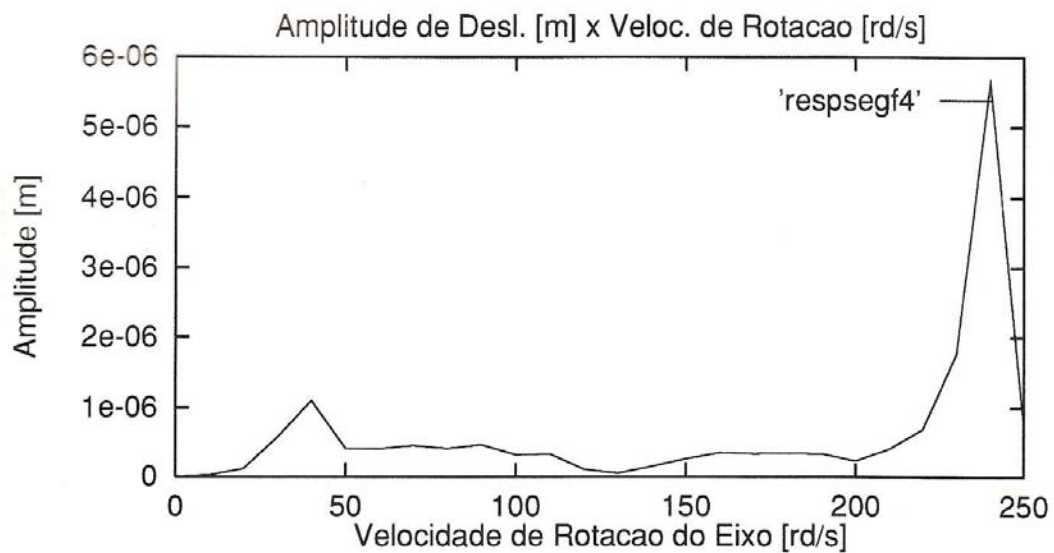


Figura 6.28: Amplitude do Deslocamento, mancal segmentado, nó=4

7 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O trabalho realizado é uma contribuição ao estudo do comportamento dinâmico de máquinas rotativas verticais de rotores flexíveis interligadas por meio de mancais hidrodinâmicos às estruturas de montagem. Foram deduzidos os modelos apresentados em [10][15] e simuladas algumas condições de operação.

Após as simulações realizadas pode-se afirmar que o modelo confirma a previsão da teoria para modelos não-lineares para o mancal tipo cilíndrico, onde ocorreu a instabilidade do filme de óleo no dobro da primeira velocidade crítica, como visto na teoria [18][37], e para o mancal segmentado, onde os níveis de vibração, pela redução dos termos cruzados e acoplados de rigidez, são muito menores que os apresentados pelo modelo deduzido para o mancal cilíndrico a elevadas rotações.

No caso de projetos, cabe ao nível gerencial a opção pela escolha do tipo de mancal hidrodinâmico a ser usado na máquina rotativa. Deve-se levar em consideração a relação custo-benefício: o mancal cilíndrico, certamente de custo mais baixo, permite que a faixa de operação desta máquina esteja restrita entre a primeira velocidade crítica e a velocidade na qual aparecem os efeitos de "*Whirl*" e a instabilidade do filme de óleo, onde a amplitude do movimento é muito alta, causando elevadas forças de reação na estrutura

Em oposição a esta situação está o comportamento do mancal segmentado, que apresenta níveis de vibração bem mais baixo que o cilíndrico, porém com custo maior. A faixa de operação para esta "máquina" está entre 50 e 200 [rd/s], aproximadamente.

Ao nível de manutenção, se novos critérios de produção exigem que a velocidade de operação de, por exemplo, 50 [rd/s] seja aumentada, a máquina com mancais cilíndricos apresentará níveis altíssimos de vibração devido aos fenômenos que podem ser desconhecidos aos engenheiros de manutenção. A simulação numérica poderá, neste caso, fornecer rapidamente fundamentos para decisão sobre qual o tipo de mancal utilizar.

Assim, demonstra-se a utilidade do emprego da modelagem matemática de sistemas dinâmicos, para o conhecimento prévio dos níveis de vibração alcançados pelas máquinas.

Eventuais complementações poderão ser realizadas com a construção e teste de bancada ou máquina com os dados equivalentes dos modelos para a comprovação experimental.

O caráter não-linear do movimento apresentou uma curiosidade na condição de resposta à uma excitação tipo impulso, onde o rotor, após receber o impulso, parece ser atraído para o do ciclo-limite novamente, Uma sugestão é o estudo do caráter não-linear, manifestado por um eventual atrator no ciclo-limite.

A exploração da Topologia do movimento, através de outro software gráfico, com a análise dos diagramas plano-fase, da força, da pressão e variação na folga radial, bem como aplicação de cargas estáticas podem complementar o trabalho dentro da área da dinâmica de rotores.

Referências

- [1] ATALLA, Mauro Jorge. Determinação de Amortecimento Ótimo em Sistemas Mecânicos Rotativos. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, 1992. 96p. Tese (Mestrado).
- [2] BACHSCHIMID, N. Rotordynamics and Diagnostics of Rotating Machinery. Apostila: Short Course on Rotordynamics and Diagnostics, Unicamp, Campinas, Brasil, Agosto 1994.
- [3] BATHE, K.J.; WILSON, E.L. Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall Inc., **Englewood Cliffs**, 1982, p.735.
- [4] CAMERON, A. **Basic Lubrication Theory**. Longman, London, 1971, Cap. 1, 7 e 9.
- [5] CAPONE, G. Moti Orbitali di un Rotore Rígido Simmetrico su Cuscinetti Cilindrici Lubrificati. **La Meccanica Italiana** - N. 199, Jun 1986, p. 37-46.
- [6] CAPONE, G.; RUSSO, M. Short Bearing Prediction of Inertial Turbulent Journal Orbits. ASME, **Journal of Tribology**, Vol. 112, 1990, p. 643-649.
- [7] CAPONE, G. Descrizione Analitica del Campo di Forze Fluidodinamico nei Cuscinetti Cilindrici Lubrificati. **L'Energia Elettrica**, N. 3, 1991, p. 105-110.
- [8] CARDINALI, Rodmar. Modelagem e Aplicações em Diagnose de Máquinas Rotativas Verticais, Campinas: Fac. de Eng. Mecânica, Unicamp, 1992. 100p. Tese (Doutorado).
- [9] CARDINALI, R.; NORDMANN, R. e SPERBER, A. Dynamic Simulation of Non-Linear Models of Hidroelectric Machinery. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Vol. 7(1), 1993, p. 29-44
- [10] CAVALCA, K.L. et al. The Relevance of the Fluid-Dynamic Force Field Influence on the Behaviour of a Vertical Rotor with a Tilting. **Pad Journal Bearing, Machine Vibration**, Vol. 3, n. 2/3, 1995, p. 55-61.

- [11] CAVALCA, K.L; LIMA, E.N. A Non-Linear Model for Short Tilting. **Pad Journal Bearings**, In: XI COBEN.
- [12] CHILDS, D. Turbomachinery Rotordynamics-Phenomena, Modeling, and Analysis. New York: Wiley-Interscience Publication, 1993. 476p.
- [13] CONSTANTINESCU, V.N. On Turbulent Lubrication. **Proc. of IMech**, Vol. 173, N. 38, 1959, p. 881-900.
- [14] DANA, Seyyed Said. Análise Dinâmica de Rotores com Eixo Vertical. Campinas: Fac. de Eng. Mecânica, Unicamp, 1987, s.n, Tese (Doutorado).
- [15] DEDINI, F.G. et al. The Relevance of the Fluid Field Influence on the Behavior of a Vertical Rotor with a Cilindrical. **Journal Bearing**. In: Congresso de Engenharia Norte Nordeste, Belém, Brasil, Julho 1994, p. 376.
- [16] DIANA, G.; RUGGIERI, G. Sull'Instabilità da Film d'Óleo: Modello Analítico per Cuscinetti Cilindrici . **L'Energia Elettrica**, N. 3, 1974, p. 84-90.
- [17] DOWNSON, D. Osborne Reynolds Centenary (1886-1986). **Proc. of IMech**, Vol. 201, N. C2, 1987, p. 75-96.
- [18] EHRICH, F.E. Handbook of Rotordynamics, McGraw-Hill, N. York, 1992.
- [19] HASHIMOTO, H.; WADA, S. e ITO, J. An Application of Short Bearing Theory to Dynamic Characteristics Problems of Turbulent Journal Bearings. ASME, **Journal of Tribology** - Vol. 109, 1987, p. 307-314.
- [20] HASHIMOTO, H.; WADA, S. e SUMITOMO, M. The Effects of Fluid Inertia Forces on the Behaviour of Short Journal bearings in Superlaminar Flow Regime. ASME, **Journal of Tribology**, Vol. 112, 1990, p. 643-649.

- [21] HERSEY, M.D. Theory and Research in Lubrication - Foundations for Future Development. John Wiley & Sons, N. York, 1966, Cap. II e VII.
- [22] HORI, Y. A Theory of Oil Whip - "Trans. ASME", **Journal of Applied Mechanics**, Jun 1959, p. 189-198.
- [23] KIRK, R. G.; GUNTER, E. J. Short Bearing Analysis Applied to Rotor Dynamics P.1: Theory. ASME, **Journal of Lubrication Technology**, Vol. 98, 1976, p. 47- 56.
- [24] KIRK, R. G.; GUNTER, E. J. Short Bearing Analysis Applied to Rotor Dynamics P.2: Results of Journal Response. ASME, **Journal of Lubrication Technology**, Vol. 98, 1976, p. 319-329.
- [25] LALANNE, M.; FERRARIS, G. Rotordynamics Prediction in Engineering. John Wiley & Sons, Chicester, 1990, Cap. 1, 2 e 3.
- [26] LUND, J. W. Spring and Damping Coefficients for the Tilting-Pad Journal Bearing. **ASLE Transactions**, 7, 1964, p. 342-352.
- [27] LUND, J. W. Review of the Concept of Dynamic Coefficients for Fluid Film. **Journal Bearings - ASME - Trans. Journal of Tribology**. Vol. 109, Jan 1987, p. 37-41.
- [28] MEITOVITCH, L. Elements of Vibration Analysis, McGraw-Hill, N. York, 1975, Cap. 4, pg. 124.
- [29] MUSZYNSKA, A. Whirl and Whip - Rotor-Bearing Stability Problems. **Journal of Sound and Vibration**, Vol.110 (3), 1986, p. 443-462.
- [30] PICOLLI, Humberto Camargo, Observação de Caos nas Medições de um rotor com Rubbing, Campinas: Fac. de Eng. Mecânica, Unicamp, 1994, p.156 Tese (Doutorado).
- [31] PINKUS, O. Solution of Reynolds Equation for Finite. **Journal Bearings - ASME Trans.**, Vol. 80, 1958, p. 858-864.

[32] PINKUS, O. The Reynolds Centennial: A Brief History of the Theory of Hidrodinamic Lubrication. **ASME - Trans.**, Vol. 109, 1987, p. 2-20.

[33] RUGGIERI, G. Un Metodo Approssimato per la Risoluzione dell'Equazione di Reynolds. **L'Energia Elettrica**, N. 2, 1976, p. 86-96.

[34] STERNLICHT, B.; MAGINNIS, F. J. Application of Digital Computers to Bearing Design. **ASME - Trans.**, Vol. 79, 1957, p. 1483-1493.

[35] SMITH, M.I.; FULLER, D.D. Journal Bearing Operation at Superlaminar Speeds. **ASME - Trans.**, Vol. 78, April 1956, p. 469-473.

[36] SPIEGEL, M.R. Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas. Coleção Schaum, McGraw-Hill, São Paulo, 1973, p. 269

[37] VANCE, J.M. Rotordynamics of Turbomachinery, John Wiley & Sons, N. York, 1988, Cap. I, II e VI.

[38] WARNER, P.C. Static and Dynamic Properties of Partial Journal Bearings. **Journal of Basic Engineering**, Jun. 1963, p. 247-257.